УНИВЕРСАЛЬНАЯ АРИѲМЕТИКА,

Г. Леонгарда Ейлера.

Переведенная съ нѣмецкаго подлинника студентами Петромъ Иноходцовымъ и Иваномъ Юдинымъ.

ТОМЪ ПЕРВЫЙ,

содержащій въ себѣ всѣ образы алгебраическаго вычисленія.

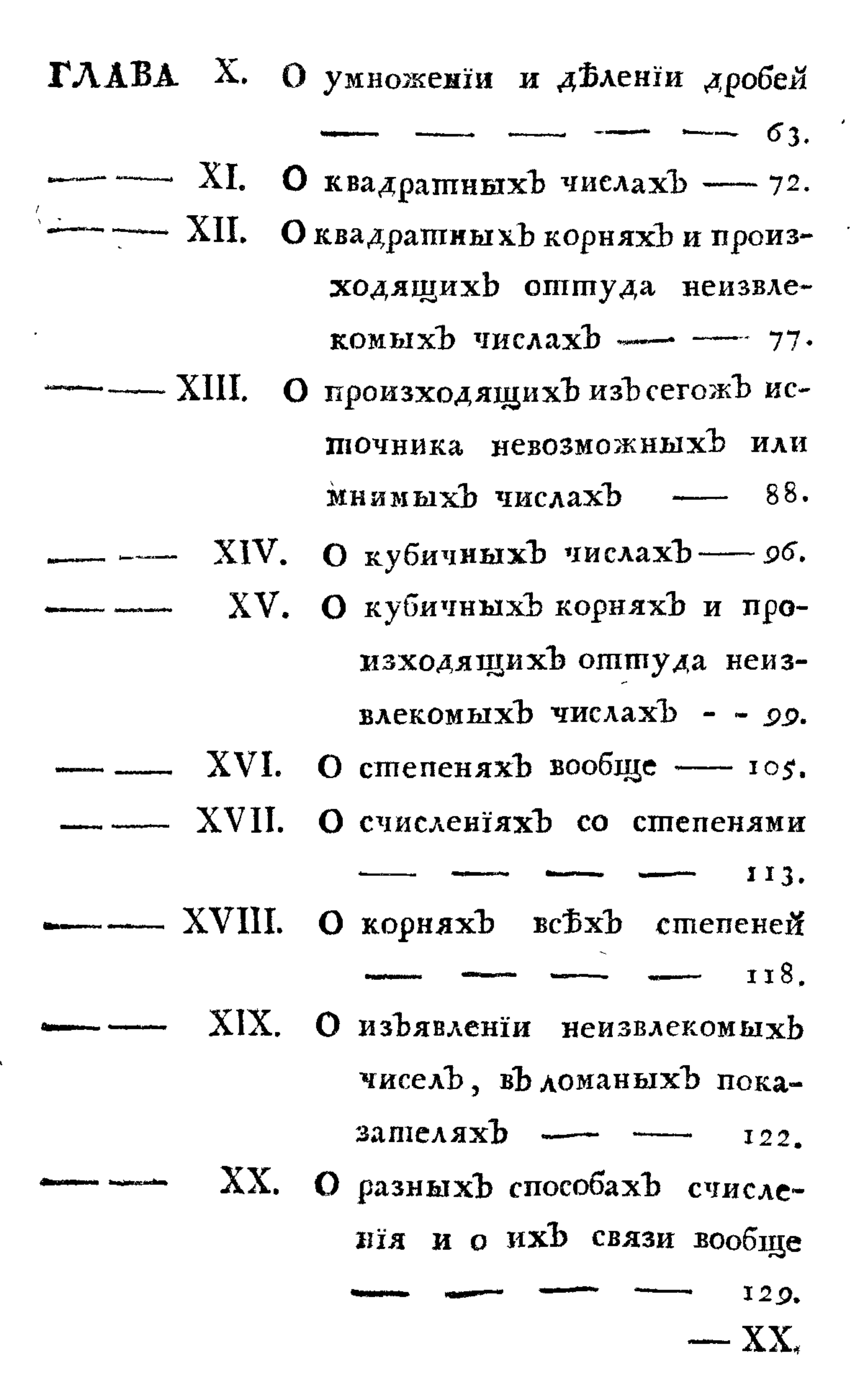


при Императорской Академии Наукъ 1768 года.

РОСПИСЬ МАТЕРІЯМЪ.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

О разныхъ родахъ исчисленія простыхъ количествъ.



— XX.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

о разныхъ родахъ изчисленія составныхъ количествъ.

ЧАСТЬ ТРЕТІЯ

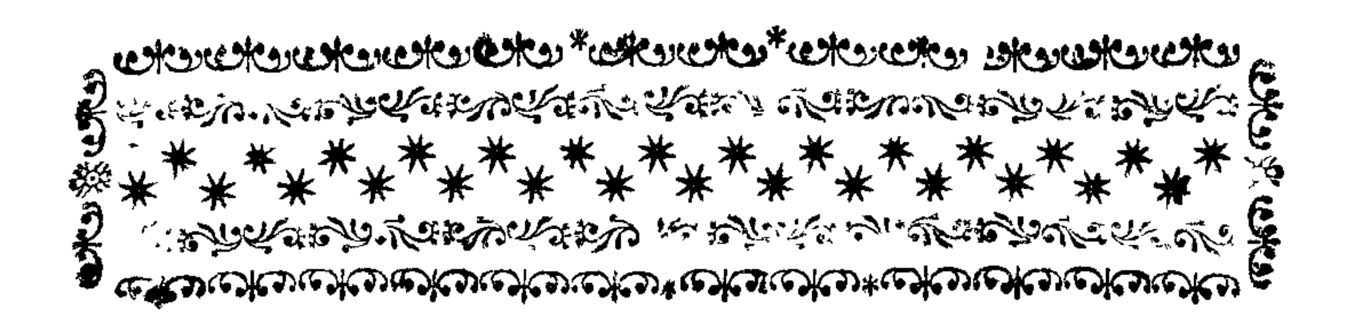
о содержаніи и пропорціи.

—IV.

конецъ росписи.

ПОГРѢШНОСТИ.

Стран.	строки	напечатано	читай
58	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{12}{2}$
—		$\frac{8}{3}$	$\frac{18}{3}$
61	9	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{21}$
67	9	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{6}$
71	18	$+\frac{8}{15}$	$-\frac{8}{15}$
80	17	$\frac{8}{101}$	$\overline{121}$
87	1	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$
100	16	$1^{\overline{3}}$	$1\frac{1}{3}$
101	20	$\frac{8}{8}$	$\frac{1}{8}$
104	7	$4\sqrt{a}$	$4\sqrt[8]{a}$
109	17	понеже a	понеже a^{1}
111	8	$\frac{1}{a}$	$a^{\frac{1}{1}}$
		$-$	$\vert 3\vert -1$
—	18	$a\,1$ —	a
112	18	*а*я	бя
141	2	$-cd$	$-ld$
149	10	$3\,4+4$	$3x+4$
177	21	ab	aab
181	0	простыхъ	составныхъ
187	13	$2a^{3}b^{2}$	$2a^{3}b$
194	3	$a = {}^{\overline{3}}$	$a = \frac{2}{3}$
212	15	$+b$	$+b^{6}$
225	17	$2a^{2}bb$	$3a^{2}bb$
227	15	$3aabbab^{3}$	$3aabb - ab^{3}$
233	9	6 той $= \frac{7}{1}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{4}\cdot$	6 той $= \frac{7}{1}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{4}\cdot\frac{3}{5}$
244	12	$\sqrt{a} = a4^{1}$	$\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$
262	12	— b	— p
321	17	ценнаго	цѣпнаго.



ПЕРВАЯ ЧАСТЬ,

о разныхЪ родахЪ исчисленія, простыхЪ количествЪ.

ГЛАВА I.

вЪ которой разсуждается о Маѳиматическихъ наукахЪ вообще.

СТАТЬЯ 1.

ВОпервыхЪ все что увеличиться или уменьшиться можетЪ, или кЪ чему прибавить или убавить можно, называется *величина* или *количество*.

По сему сумма денегЪ есть количество, ибо кЪ оной придать и отЪ оной убавить можно.

равнымъ образомъ и вѣсъ и многія другія сему подобныя вещи величиною назваться могутъ.

2.

И такъ находятся весьма многіе различные роды величинъ, коихъ всѣхъ удобно изчислить не можно: отсюду произходятъ разныя части Маѳиматики, и въ каждой о особливомъ родѣ величины разсуждается; ибо *Маѳиматика* обще есть наука о познаніи количествъ и изыскиванія средства къ измѣренію оныхъ.

3.

Но величину количества опредѣлить или вымѣрять инаго средства нѣтъ, какъ взявъ нѣкоторое количество такого же роду за извѣстное, изыскать его содержаніе къ мѣримому, которое и покажетъ, какъ одинакаго рода величины состоятъ между собою. И такъ когда величина суммы денегъ опредѣлена быть долженствуетъ, то возми нѣкоторую извѣ-

извѢстную деньгу какЪ напримѢрЪ гульденЪ, рейхсталерЪ, рубль или червонецЪ и сему подобное за извѢстное количество, по чему окажется, сколько разЪ оная деньга вЪ помянутой суммѢ содержится.

РавнымЪ образомЪ когда величину какой нибудь тягости опредѢлить должно, то возьми какую ниесть тягость напримѢрЪ фунтЪ, центнерЪ или лотЪ и сему подобное, за извѢстное количество, и смотри сколько такихЪ тягостей содержится вЪ прежней.

А ежели длину или ширину вымѢрять должно, то сбыкновенно употребляютЪ кЪ тому извѢстную длину, которая футомЪ называется.

4.

И такЪ при опредѢленіи или вымѢриваніи величинЪ всѢхЪ родовЪ, дѢло состоитЪ вЪ томЪ, чтобЪ вопервыхЪ извѢстная величина одинакого роду сЪ мѢримою опредѢлена была, которая мѢ-

рою или единицею называется, и оная слѣдовательно отъ нашего произволенія зависитъ; потомъ чтобъ опредѣлено было, въ какомъ содержаніи помянутая величина съ сею мѣрою находится, что всегда числами означается; по чему и *число* не иное что, какъ содержаніе одного количества къ другому, которое берется за единицу.

5.

Изъ сего явствуетъ, что всѣ величины выражаются чрезъ числа; и такъ основаніе всей Маѳиматической науки въ томъ состоять должно, что бы знаніе о числахъ, и всѣ роды вычисленія, какія при томъ случиться могутъ, въ точное принять разсужденіе и оное разобрать обстоятельно.

Которая основательная часть Маѳиматики называется *Аналитика* или *Алгебра*.

6.

И такъ Аналитика объ однихъ токмо числахъ толкуетъ, по которымъ означи-

означиваются величины, не принимая разные роды количествъ въ разсужденie, какъ то видится въ другихъ частяхъ Маѳиматики.

7.

О числахъ особливо толкуетъ Ариѳметика; но оная простирается токмо до извѣстныхъ родовъ исчисленія, которыя чаще въ общемъ житіи случаются; напротивъ того Аналитика вообще до всякаго роду, какой только при числахъ и изчисленіи оныхъ случиться можетъ.

ГЛАВА II.

Изъясненіе знаковъ + plus *плюсъ* и — minus *минусъ*, которые по Россійскій изобразить можно: чрезъ *съ* и *безъ*

8.

Когда къ одному числу придастся другое, или когда одно число съ другимъ сложится, то означается сіе помощію

знака + (plus) которой попереди числа ставится.

И такЪ чрезЪ 5+3 означается то, что число 5 сЪ 3 сложено быть должно, отЪ чего произойдетЪ 8; равнымЪ образомЪ 12+7 составляютЪ, 19, 25+16 даютЪ 41 а 25+41 есть 66 и проч.

9.

ПосредствомЪ сего знака + plus можно соединить еще и больше чиселЪ, какЪ напримѢрЪ.

7+5+9 значитЪ, что число 7 сЪ 5 и сЪ 9 сложено быть должно, что составляетЪ 21; по чему разумѢется знаменованіе и слѢдующей формулы яко 8+5+13+11+1+3+10 составляютЪ 51.

10.

СверьхЪ сего должно еще примѢчать, что обыкновенно сіи числа означиваются буквами, какЪ a, b, c, d и проч. и такЪ когда напишется a+b,

то

то сїе означаетъ сумму обоихъ чиселъ, которыя буквами a и b означены, сколь бы велики или малы они ни были; равнымъ образомъ f + m + b + x значитъ сумму чиселъ изсбраженныхъ сими буквами.

И такъ во всякомъ случаѣ, когда только извѣстно какїя числа какими буквами означиваются, можно помощїю числительной науки сыскать сумму или подлинное знаменованїе такихъ формулъ.

II.

Когда напротивъ того отъ одного числа другое отнятно быть должно или вычтено, то означивается сїе знакомъ — (minus) которой попереди ставится. Какъ напримѣръ 8 — 5 показываетъ что отъ числа 8 отнять должно 5, почему, какъ извѣстно, въ остаткѣ будетъ 3; равнымъ образомъ 12 — 7 даетъ 5; а 20 — 14 есть 6 и проч.

12.

Можетъ также случиться, что изъ одного числа много чиселъ вмѣстѣ вычитаются, какъ наприм.

$$50 - 1 - 3 - 5 - 7 - 9$$

что разумѣть должно слѣдующимъ образомъ: отними сперва отъ 50, 1цу останется 49, отъ сего числа паки 3, останется 46, отъ сего 5 останется 41, отъ сего 7 останется 34, отъ 34 отними послѣдніе 9 останется 25, которое показываетъ величину предложенной формулы. Но когда числа 1, 3, 5, 7, 9 и вмѣстѣ вдругъ отнимешъ, то тоже выдетъ, какъ будто бы сумма ихъ т. е. 25 вдругъ отнята, ибо тоже что и прежде т. е. 25 остается.

13.

Равнымъ образомъ можно также легко сумму такой формулы назначить, въ которой много знаковъ + и − сойдется: какъ наприм.

$12 - 3 - 5 + 2 - 1$ даетъ 5.

или можно особливо взять токмо сумму тѣхъ чиселъ, которыя имѣютъ предъ собою знакъ + какъ $12 + 2$ составляютъ 14, и когда отъ сего числа отнимется сумма всѣхъ чиселъ имѣющихъ предъ собою знакъ —; какъ то 3, 5, 1 сумма 9; то въ остаткѣ такъ какъ и прежде, будетъ 5.

14.

Изъ сего видно, что нѣтъ никакой силы въ порядкѣ, которымъ разставлены числа; но можно оныя ставить по своей волѣ, лишъ бы только каждое число означенной свой знакъ предъ собою имѣло, такъ напр. вмѣсто прежней формулы поставить можно слѣдующую $12 + 2 - 5 - 3 - 1$ или $2 - 1 - 3 - 5 + 12$ или $2 + 12 - 3 - 1 - 5$. При чемъ примѣчать должно, что въ первой формулѣ предъ числомъ 12 поставленъ разумѣется знакъ +

15.

Когда же теперь, что бы по предложенному выше дѣлу дать общій ра-

зумЪ, вмѣсто дѣйствительныхЪ чиселЪ употребяися буквы, то можно легко понять и знаменованїе оныхЪ: наприм. a—b—c+d—e показываетЪ, что отЪ изображенныхЪ литерами a и d чиселЪ, протчїя знакЪ — имѣющїя вмѣстѣ отнять должно.

16.

И такЪ главное дѣло здѣсь состоитЪ вЪ томЪ, чтобЪ знать какой знакЪ каждое число предЪ собой имѣетЪ, по чему обыкновенно вЪ Алгебрѣ числа сЪ ихЪ предстоящими знаками, какЪ простыя величины разсуждаются, и которыя имѣютЪ предЪ собою знакЪ + называются *прибыточныя*, или *положительныя*, которыя же знакЪ — *убыточныя*, или *отрицательныя*.

17.

Сїе весьма изрядно изЪяснить можно имѣнїемЪ какого нибудь человѣка; когда то, что онЪ дѣйствительно у себя имѣетЪ означится числами сЪ знакомЪ + plus; а то, чѣмЪ онЪ долженЪ числами сЪ знакомЪ — minus.

такЪ

Такъ когда кто нибудь имѣетъ у себя 100 рублей, а при томъ долженъ 50 ю рублями, то имѣніе его состоять будетъ изъ 100 — 50, или что тоже изъ + 100 — 50 т, е. 50.

18.

Когда убыточныя взираются какъ долги, то о прибыточныхъ какъ о дѣйствительномъ имѣніи разсуждать должно; по чему можно сказать, что убыточныя числа суть менѣе, нежели ничего; И такъ, когда кто никакого у себя имѣнія не имѣетъ, а при томъ еще 50ю рублями долженъ, то онъ дѣйствительно имѣетъ 50 руб. менѣе нежели ничего. По тому что, когда бы кто подарилъ ему 50 руб. чтобъ заплатилъ долгъ свой, то тогда не имѣлъ бы онъ ничего, хотя въ самомъ дѣлѣ и больше бы имѣлъ нежели прежде.

19.

Когда прибыточныя числа дѣйствительно болѣе нежели ничего, то убыточныя менѣе ничего: но прибыточныя

точныя числа произходятЪ безпрестаннымЪ кЪ о или кЪ ничему прибавленїемЪ единицы ; отЪ чего потомЪ происходитЪ рядЪ или строка такЪ названныхЪ натуральныхЪ чиселЪ , какЪ то о + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 и такЪ безконечно. ТакимЪ же образомЪ сей рядЪ и назадЪ продолжить можно безпрерывнымЪ отниманїемЪ отЪ о единицы, отЪ чего сей рядЪ произходитЪ ;

о — 1 — 2 — 3 — 4 — 5 — 6 — 7 — 8 — 9 — 10
и такЪ безконечно.

20.

ВсѢ сїи числа какЪ положительныя такЪ и отрицательныя называются извѢстнымЪ именемЪ *цѣлыми числами*, и отЪ дробей и многихЪ другихЪ чиселЪ , о которыхЪ ниже сего предложено будетЪ, отличаются. ТакЪ вЪ примѢрѢ 50 цѢлое число болѢе 49 ти, то легко можно понять, что между 49ти и 50ю еще безконечно много посреднихЪ чиселЪ стоять можетЪ, которыя всѢ больше 49ти,

а

а менѣе 50ти; можно для сего вЪ примѣрЪ взять двѣ линѣи, изЪ которыхЪ одна длиною вЪ 50 саженЪ, а другая вЪ 49, то легко поймешь, что безконечно много другихЪ линѣй провесть можно, которыя всѣ долѣе 49ти, а короче 50 саженЪ.

21.

Сїе понятїе о убыточныхЪ величинахЪ тѣмЪ наипаче примѣчанїя достойно, что оно во всей Алгебрѣ весьма важно: здѣсь довольно будетЪ для примѣчанїя, что вЪ сихЪ формулахЪ, какЪ наприм. $+1-1$, $+2-2$, $+3-3$, $+4-4$ и такЪ далѣе всѣ числа не иное что суть какЪ 0 или ничего; и что наприм. $+2-5$ не что иное какЪ -3, для того, что когда кто имѣетЪ 2 рубли, а 5ю рублями долженЪ, то онЪ не только не имѣетЪ ничего, но еще 3мя рублями остается долженЪ, такимЪ же образомЪ

$7-12$ равно -5
$25-40$ —— -15

22.

Тоже самое наблюдать должно, когда вмѣсто чиселъ возмутся литеры; ибо $+a-a$ всегда столько же составляетъ какъ и o или ничего; потомъ ежели знать пожелаешъ, что напр. $+a-b$ значитъ, то надлежитъ два случая принять въ разсужденіе.

1. Когда a больше нежели b, тогда b вычитаютъ изъ a, и остатокъ съ прибыточнымъ знакомъ взятой показываетъ искомое число.

2. Ежели a меньше b, то вычитаютъ a изъ b и остатокъ съ убыточнымъ знакомъ взятой, или знакъ minus $-$ попереди поставленъ, показываетъ искомое число.

ГЛАВА III.

О умноженіи простыхъ количествъ.

23.

Когда 2 или болѣе равныхъ чиселъ сложатся вмѣстѣ, тогда сумма кратчайшимъ

чайшимъ образомъ выражается, какъ напримѣръ:

a+a равно 2 a

a+a+a - - - 3 a

a+a+a+a - - - 4 a и такъ далѣе, изъ чего понятїе о умноженїи раждается а имянно.

2. a не иное что какъ a взятое дважды.
3. a ——— ——————— a взятое трижды.
4. a тоже что и a взятое четырежды и такъ далѣе.

24.

И такъ когда литерою означенное число на другое какое число помножить должно, то число всегда пишется передъ литерою, какъ напримѣръ.

a на 20 умноженное даетъ 20 a

b на 30 помноженное даетъ 30 b и пр.

Такимъ образомъ c взятое однажды или одно c тоже что c.

25.

Такїя произведенїя можно еще и на другїя числа множить, какъ наприм.

2жды

2жды 3 a составляютъ 6 a
3жды 4 b дѣлаютъ 12 b
5ю 7 x даютъ 35 x, которыя еще далѣе на произволящія числа множить можно.

26.

Когда то число, на которое помножать должно, означено будетъ литерою, тогда безпосредственно ставится оно попереди другой литеры; какъ наприм. Когда b умножить должно на a, то произведеніе будетъ ab, также pq есть произведеніе, которое происходитъ изъ умноженія числа q на p; но ежели хочешь pq умножить еще на a, то произойдетъ apq.

27.

При семъ примѣчать надлежитъ, что здѣсь не требуется особливаго порядка въ постановленіи литеръ рядомъ; ибо ab тоже значитъ что и ba; или b умноженное на a дѣлаетъ тоже что и a умноженное на b; а чтобъ сіе понять яснѣе, то можно вмѣсто a и b

взять

взять извѣстныя числа, какъ 3 и 4 и тогда само собою видно будетъ, что 3 жды 4 есть тоже что и 4 жды 3.

28.

Когда вмѣсто литеръ, которыя безпосредственно сряду написаны должно будетъ поставить самыя числа, то легко видѣть можно, что оныя тогда безпосредственно написать не льзя; ибо когда бы вмѣсто 3 жды 4 захотѣлъ написать 34, то не было бы 12 но 34, и такъ когда умноженїе простыхъ чиселъ означить должно, то обыкновенно ставится между оными точка, какъ наприм. 3. 4. значитъ 3 жды 4, 12; равнымъ образомъ 1. 2 есть 2, 1. 2. 3 есть 6, 1.2.3.4.5.6 есть 720 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10 будетъ 3628800 и такъ далѣе.

29.

Изъ сего явствуетъ, что значитъ сїе изображенїе 5.7.8.a.b.c.d, а имянно: сперва 5 должно помножить на 7, произведенїе на 8, сихъ чиселъ произведенїе паки на a, сїе новое на b, потомъ на

с, а напослѣдокъ на d. Причемъ примѣчать должно, что вмѣсто 5.7.8 писать самое можно произведеніе т. е. число 5 ю 7, 35 и 8 ю 35, 280.

30.

Еще примѣчать должно, что такія формулы, которыя отъ умноженія многихъ чиселъ произходятъ называются *произведеніями*; а простыя числа или литеры обыкновенно именуются *множителями*.

31.

До сихъ поръ разсуждали мы только о числахъ положительныхъ или прибыточныхъ, и нѣтъ сумнѣнія, чтобъ произшедшія отъ того произведенія не были положительныя же, напр +a умноженное на +b даетъ безъ сомнѣнія +ab; а что произойдетъ, когда +a умножено будетъ на − b или − a на + b, оное требуетъ особливаго изъясненія.

32.

Умножимъ вопервыхъ − a на 3, или на + 3; понеже − a за долгъ при-

принять можно, то извѣстно, что долгъ сей три раза взятой, три раза и болѣе быть долженъ, слѣдовательно выдетъ искомое произведенїе — 3 a; равнымъ образомъ когда — a на b т. е. на + b помножено будетъ, то выдетъ — ba; или что все тоже — ab. Изъ сего заключить можно, что когда положительныя величины помножены будутъ на отрицательныя: сирѣчь прибыточныя на убыточныя, то произведенїе будетъ убыточное; отсюду произходитъ слѣдующее правило: + умноженной на + даетъ +; напротивъ того + умноженной на —, или — на + даетъ —.

33.

Осталось теперь только упомянуть о слѣдующемъ случаѣ: когда — умноженъ будетъ на —, или — a на — b, при чемъ вопервыхъ извѣстно, что произведенїе въ рассужденїи литеръ будетъ ab; но должно ли къ тому придать знакъ + или —, о томъ сказать не

можно, то только извѣстно, что одинъ изъ оныхъ знаковъ, или тотъ, или другой быть долженъ. Но теперь вопрошаю, не можетъ ли быть тутъ знакъ — ? понеже — a умноженное на + b даетъ — ab, слѣдовательно — a умноженное на — b не можетъ тоже дать, что даетъ — a на + b, но должно изъ того выйти противному, а имянно + ab. Изъ сего слѣдующее произходитъ правило: — умноженной на — даетъ + подобно какъ и + умноженной на +.

34.

Сіи правила обыкновенно соединяются, и кратко сими словами выговариваются: два одинакіе знака умноженные между собою даютъ +, а два разные даютъ —; такъ напримѣръ, когда сіи числа: + a. — b. — c. + d другъ на друга помножены будутъ, то вопервыхъ + a. — b даетъ — ab, сіе на — c даетъ + abc, наконецъ еще на d умноженное даетъ + abcd.

35.

35.

Понеже теперь въ рассужденіи знаковъ нѣтъ никакого затрудненія: то остается еще показать, какимъ образомъ два числа, которыя сами суть произведенія, помножить должно между собою; когда ab помножено будетъ на cd, то произведеніе будетъ abcd, и произходитъ оное, когда ab умножится на c и произведеніе на d; или когда наприм. 36 на 12 умножить должно, и понеже 12 произходятъ отъ умноженія 3хъ на 4; то надлежитъ только сперьва 36 умножить тремя и произведеніе т. е. 108 четырьмя, такъ выдетъ 432 равно 12. 36.

36.

А ежели бы кто захотѣлъ 5 ab умножить на 3 cd, то можетъ оное такъ поставить 3 cd. 5 ab; но понеже здѣсь все равно, какимъ порядкомъ нистоятъ умноженныя между собою числа, то числа ставятъ, обыкновенно попереди и пишутъ вмѣсто того произве-

денія 5. 3 abcd или 15 abcd, потому что 5 умноженное на 3 равно 15. равнымъ образомъ когда 12 pqv умножено будетъ на 7 xy, то произведеніе будетъ 12. 7 pqvxy т. е. 84 pqvxy.

ГЛАВА IV.

о свойствѣ цѣлыхъ чиселъ въ разсужденіи ихъ множителей.

37.

Мы видѣли уже, что когда два или болѣе чиселъ между собою помножатся; оныя называются въ разсужденіи произведенія множителями, какъ напримѣръ: множители произведенія abcd суть a, b, c, d.

38.

Естьли теперь возмемъ всѣ цѣлыя числа въ разсужденіе, поелику оныя отъ умноженія двухъ или болѣе чиселъ произходятъ, то тотчасъ видно, что нѣкоторыя совсѣмъ не отъ умноженія произходятъ, слѣдовательно никакихъ

мно-

множителей не имѣютъ, а нѣкоторыя отъ умноженія двухъ или болѣе чиселъ раждаются, слѣдовательно два или болѣе множителей имѣютъ, какъ наприм. 4 равно 2. 2, 6 равно 2. 3, 8 равно 2. 2. 2, 27 равно 3. 3. 3, 10 равно 2. 5 и такъ далѣе.

39.

Напротивъ того слѣдующія числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 вышепоказаннымъ образомъ во множителяхъ представить не можно, развѣ употребить къ тому и единицу; наприм. 2 изобразить чрезъ 1. 2; но какъ единицею помноженное число не перемѣняется, то оная и въ число множителей причтена быть не можетъ.

И такъ всѣ такія числа, которыя множителей имѣть не могутъ, какъ то 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, и проч. называются *простыми*, *первыми* или *первоначальными числами*. Напротивъ того тѣ, которыя множителей имѣютъ, какъ:

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18 называются *сложенными*.

40.

По сему *простыя* или *первыя числа* особливаго вниманія достойны, для того что оныя отъ умноженія двухъ или болѣе чиселъ не происходятъ. При чемъ особливо примѣчанія достойно сіе, что когда оныя въ рядъ поставлены будутъ по порядку, какъ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, и такъ далѣе, то въ разсужденіи оныхъ никакого порядка не видно, но растутъ то больше, то меньше, какъ кажется, безъ порядка. Ибо и по нынѣ еще не могли найти закона, по которому оныя возрастаютъ.

41.

Но сложныя числа, которыя во множителяхъ представить можно, произходятъ всѣ изъ вышепомянутыхъ простыхъ чиселъ, такъ что всѣ множители оныхъ суть простыя числа; ибо когда

когда бы какой либо множитель былъ некогда простое, но сложное число, то можно бы его представить въ двухъ или болѣе множителяхъ, которые бы были простыя числа, такъ когда число 30 представится чрезъ 5. 6, то не 6 простое число будетъ, но 2. 3 слѣдовательно 30 можно изобразить чрезъ 5. 2. 3 или 2. 3. 5 гдѣ всѣ множители суть простыя числа.

42.

Естьли теперь разсмотримъ всѣ сложныя числа, то есть какимъ образомъ оныя чрезъ простыя числа представляются, то найдемъ въ томъ великое различїе; ибо нѣкоторыя имѣютъ только два такихъ множителя, иныя 3 а иныя 4 или болѣе, наприм. какъ уже видѣли:

4 равны	2. 2;		6 равны	2. 3
8 - - -	2. 2. 2;		9 - - -	3. 3
10 - - -	2. 5;		12 - - -	2. 3. 2
14 - - -	2. 7;		15 - - -	3. 5

16 равны 2. 2. 2. 2 и такъ далѣе.

43.

Изъ сего явствуетъ, какимъ образомъ каждаго числа простые множители находятся. На прим. предложено число 360, то явствуетъ вопервыхъ, что оно состоитъ изъ 2. 180, а сїе 180 равно - - - - - - - 2. 90, сїе 90 равно - - - - - - - 2. 45, сїе 45 равно - - - - - - - 3. 15, наконецъ 15 равно - - - - - - - 3. 5, слѣдовательно число 360 представляется въ слѣдующихъ простыхъ множителяхъ 2. 2. 2. 3. 3. 5, которыя числа всѣ вмѣстѣ умноженныя между собою, составляютъ 360.

44.

Изъ сего видно, что простыя числа ни на какїя другїя не дѣлятся, напротивъ того сложныя наиспособно на ихъ простыхъ множителей разрѣшаются, когда сыщутся всѣ простыя числа, на которыя они раздѣлиться могутъ. Но къ сему потребно дѣленїе, о которомъ въ слѣдующей главѣ изъяснено будетъ.

Глава

ГЛАВА V.

О дѣленіи простыхъ количествъ.

45.

Когда какое либо число раздѣлить должно на двѣ равныя части, на три или болѣе, то дѣлается оное помощїю дѣленія, которое показываетъ, какимъ образомъ назначить величину такой части. Когда 12 раздѣлить должно на три равныя части, то найдешъ помощїю дѣленія, что та часть 4 будетъ.

Употребляютъ притомъ нѣкоторыя извѣстныя имена, и всякое число, которое дѣлить должно, называютъ *дѣлимымъ числомъ*, число такихъ частей, на какіе дѣлится *дѣлителемъ*, а величину всякой части, которая помощїю дѣленія сыскана будетъ, *частнымъ числомъ*, какъ напримѣръ;

12 *дѣлимое число*

3 *дѣлитель*

4 *частное число.*

46.

И такъ когда какое либо число раздѣлишь на 2, или на двѣ равныя части, то такая часть, т. е. частное число, дважды взятое прежде помянутое число неотмѣнно произвесть должно; равнымъ образомъ, когда какое нибудь число раздѣлить должно на 3, то частное число трижды взятое оное число произвесть должно; и такъ вообще всегда должно выйти дѣлимому, когда частное число дѣлителемъ помножится.

47.

Чего ради и въ дѣленіи слѣдующее наблюдать должно: ищи для частнаго числа такое число, которое умноженно будучи дѣлителемъ даетъ точно дѣлимое число. Когда наприм. 35 раздѣлить должно на 5, то ищи такое число, которое помноженное 5 ю произведетъ 35; оное число есть 7, потому, что 5 ю 7, 35. Для сего обыкновенно употребляютъ слѣдующую рѣчь: 5 въ 35 содержится 7 разъ, потому, что 5 ю 7 есть 35.

Почему

48.

Почему дѣлимое можно взять за произведенїе, котораго одинъ множитель равенъ дѣлителю, а другой частному числу. И такъ, когда дано мнѣ 63 раздѣлить на 7, то ищу произведенїе, котораго одинъ множитель 7 помноженной на нѣкоторое другое число даетъ произведенїе 63, такое число есть 9, и потому 9 есть частное число, которое произходитъ отъ раздѣленїя 63 на 7.

49.

Такожде когда a b раздѣлить должно на a, то частное будетъ b, потому, что a умноженное на b составляетъ дѣлимое a b; изъ сего видно, что когда ab раздѣлить должно на b частное число будетъ a.

И такъ вообще во всѣхъ примѣрахъ дѣленїя, когда дѣлимое на частное число раздѣлится, дѣлителю выйти должно; наприм. когда 24 на 4 раздѣленное даетъ 6, то и обратно 24 на 6 раздѣленное дастъ 4.

Понеже

50.

Понеже все дѣло въ томъ состоитъ, чтобъ представить себѣ дѣлимое, какъ произведеніе въ двухъ множителяхъ состоящее, изъ которыхъ одинъ равенъ дѣлителю, а другой частному числу, то и слѣдующіе примѣры легко разумѣть можно: яко число abc раздѣленное на a даетъ bc, по тому, что a умноженное на bc составляетъ abc; равнымъ образомъ abc раздѣленное на b даетъ ac; но abc на ac раздѣленное даетъ b. Потомъ 12 mn раздѣленные на 3 m даютъ 4 n. по тому, что 3 m умноженные на 4 n составляютъ 12 mn; когда же самыя сіи числа 12 mn раздѣлены будутъ на 12, то произойдетъ mn.

51.

Понеже каждое число a чрезъ 1. a или 1 a изобразить можно: то изъ сего видно, что когда a или 1 a на 1 раздѣлишь, тоже самое a въ частномъ числѣ выдетъ; напротивъ того, когда тожъ самое a или 1 a на a раздѣлишь, частное число будетъ 1.

Но

52.

Но не всегда случается, чтобъ дѣлимое представить можно было, какъ произведенїе въ двухъ множителяхъ состоящее, изъ которыхъ бы одинъ равенъ былъ дѣлителю, и въ такомъ случаѣ дѣленїя такимъ образомъ дѣлать не можно: ибо когда на прим. 24 раздѣлить должно на 7, то 7 не есть множитель 24хъ, потому что 7. 3 дѣлаютъ 21 и слѣдовательно менѣе; на противъ того 7. 4 уже 28, слѣд. болѣе составляютъ. Однако видно изъ сего, что частному числу болѣе 3хъ, а менѣе 4хъ быть должно. Чего ради для точнаго опредѣленїя онаго надлежитъ въ помощь взять числа дробями названныя, о которыхъ въ слѣдующей главѣ предложено будетъ.

53.

Между тѣмъ пока къ изъясненїю дробей не приступимъ, довольно будетъ взять за частное самое ближайшее цѣлое число, замѣтя притомъ остатокъ яко въ семъ примѣрѣ: 7 въ 24 содержится

3 жды,

3жды, и останется 3; потому что 3жды 7 только 21, чего ради 3хъ въ такомъ случаѣ мало; равнымъ образомъ и слѣдующей примѣръ разумѣть должно, какъ:

```
6| 34 |5      то есть дѣлитель 6
 | 30 |               дѣлимое 34
 ----                 частное  5
   4
                      остатокъ 4
9| 41 |4
 | 36 |
 ----
   5
```

въ такихъ примѣрахъ, гдѣ остатокъ есть, слѣдующее правило примѣчать надлежитъ.

54.

Вопервыхъ дѣлителя умножить должно частнымъ числомъ, потомъ къ произведенїю приложить еще остатокъ, и произойдетъ дѣлимое число, симъ образомъ обыкновенно повѣряютъ дѣленїе, исправно ли оно здѣлано или нѣтъ.

И такъ въ первомъ изъ двухъ послѣднихъ примѣровъ число 6 умноживъ 5 ю получишъ 30, къ тому придай остатокъ 4 и выдетъ дѣлимое число 34. Тожъ самое и въ послѣднемъ: когда дѣлитель 9 помножится частнымъ 4 и къ произведенїю 36 придастся остатокъ 5, то произойдетъ дѣлимое 41.

55.

Напослѣдокъ въ разсужденїи знаковъ plus $+$ и minus $-$ еще сїе примѣчать должно: а имянно: само собою ясно, что когда $+ab$ раздѣлено будетъ на $+a$, частное число будетъ $+b$; а когда $+ab$ раздѣлено будетъ на $-a$, то въ частномъ числѣ будетъ $-b$, потому что $-a$ умноженное на $-b$ даетъ $+ab$.

Когда же дѣлимое число есть $-ab$, и оное раздѣлено будетъ на дѣлителя $+a$, то частное число будетъ $-b$, потому что $+a$ на $-b$ умноженное, даетъ $-ab$ т. е. дѣлимое число.

А естьли наконецъ дѣлимое $-ab$ раздѣлено будетъ на дѣлителя $-a$, то

 частное

частное число будетъ + b, потому что — a умноженное на + b даетъ -- ab.

56.

И такъ находимъ мы въ дѣленіи для знаковъ + и — тѣ же самыя правила, какія выше сего видѣли въ умноженіи, а имянно: + раздѣленной на + даетъ +; + раздѣленной на - даетъ -; — раздѣленной на + даетъ —; — раздѣленной на — даетъ + или короче одинакія знаки даютъ + plus а разные — minus.

57.

И по сему когда 18 pq раздѣлишь на - 3 p, то частное число будетъ - 6 q; - 30 x y раздѣленное на — 6 y даетъ + 5 x; — 54 abc раздѣленные на — 9 b даютъ + 6 ac; потому что — 9 b умноживъ на 6 ac даетъ — 6. 9 abc или — 54 abc; чего для дѣленія простыхъ величинъ довольно будетъ. Отсюда къ изъясненію дробей поступимъ, упомянувъ напередъ мало о свойствѣ цѣлыхъ чиселъ въ разсужденіи ихъ дѣлителей.

Глава

ГЛАВА VI.

О свойствѣ цѣлыхъ чиселъ въ разсужденіи ихъ дѣлителей.

58.

Видѣли уже мы, что иныя числа могутъ имѣть нѣкоторыхъ дѣлителей, а иныя нѣтъ, то для разпознанія чиселъ сіе различіе особливо примѣчать должно; и тѣ числа, которыя на какого либо дѣлителя раздѣлить можно, надлежитъ тщательно отличать отъ тѣхъ, которыя на оной раздѣлиться не могутъ: а притомъ замѣчать остатокъ, которой при дѣленіи послѣднихъ будетъ. Чего ради возмемъ мы слѣдующихъ дѣлителей 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 и такъ далѣе въ разсужденіе.

Пусть будетъ вопервыхъ дѣлитель 2, то числа, которыя на онаго раздѣлить можно, суть слѣдующія: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 и такъ далѣе, которыя всѣ 2мя возрастаютъ

и сіи числа вообще называются *четныя числа.*

Напротивъ того прочія, какъ то: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 и такъ далѣе, которыя на 2 раздѣлиться не могутъ, но въ остаткѣ 1 оставляютъ, называются *нечетныя числа.* Почему таковое нечетное число всегда больше или меньше четнаго единицею; всѣ четныя числа можно заключить въ семъ общемъ изображеніи 2 a, потому что когда вмѣсто a поставятся по порядку одно послѣ другаго всѣ числа, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и такъ далѣе, то произойдутъ всѣ четныя числа; напротивъ того въ слѣдующей формулѣ 2 a + 1 всѣ нечетныя числа заключаются, потому что 2 a + 1 единицею больше четнаго числа 2 a

60.

Вовторыхъ пусть дѣлитель будетъ 3, то всѣ числа, которыя на 3 раздѣлиться могутъ, суть слѣдующія:

3. 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 и такъ далѣе, которыя въ формулѣ 3 a пред-

ста-

ставить можно: ибо 3 a раздѣленное на 3 даетъ въ частномъ числѣ a безъ остатка; протчія же числа, когда оныя на 3 раздѣлить пожелаеть или 1 или 2 даютъ остатку, и такъ двоякаго суть рода; тѣ, которыя 1 въ остаткѣ оставляютъ суть слѣдующія: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 и такъ далѣе, и заключаются въ сей формулѣ $3a + 1$.

Напротивъ того тѣ, которыя 2 даютъ остатку суть слѣдующія:

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20 и такъ далѣе, которыя въ сей формулѣ $3a + 2$ заключаются, такъ что всѣ числа или въ формѣ $3a$, или въ $3a + 1$, или въ $3a + 2$ содержатся.

61.

Когда же дѣлитель будетъ 4, то всѣ числа, которыя на онаго раздѣлиться могутъ, суть слѣдующія:

4, 8, 12, 16, 20, 24 и такъ далѣе, кои всегда четырьмя возрастаютъ и въ формулѣ $4a$ заключаются; а прочія

числа, которыя на 4 раздѣлиться не могутъ, оставляютъ въ остаткѣ или 1, и по сему превышаютъ оныя единицею, яко слѣдующія: 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25 и такъ далѣе, и слѣдовательно въ сей формулѣ 4 a + 1 заключаются; или оставляютъ въ остаткѣ 2, какъ наприм.

2, 6, 10, 14, 18, 22, 26 и такъ далѣе, и въ сей формулѣ 4 a + 2 заключаются. А ежели наконецъ въ остаткѣ будетъ 3, то такія числа суть слѣдующія.

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, и такъ далѣе, и въ фармулѣ 4 a + 3 заключаются, такъ что всѣ числа въ сихъ 4хъ формулахъ 4 a, 4 a + 1, 4 a + 2, 4 a + 3 содержатся.

62.

Тожъ самое дѣлается и съ дѣлителемъ 5: понеже всѣ числа, которыя на него раздѣлить можно въ формулѣ 5 a заключаются; а тѣ, которыхъ не можно, суть слѣдующія:

5 a + 1, 5 a + 2, 5 a + 3, и 5 a + 4; и такъ далѣе: сіе разсужденіе и до всѣхъ дѣлителей простирается.

63.

63.

Здѣсь весьма прилично упомянуть о предложенномъ выше разрѣшенiи чиселъ на простыя множители: ибо всякое число, между котораго множителями или 2, или 3, или 5, или 7 или другое какое первое число находится, на оныя раздѣлиться можетъ; яко 60 то же, что и 2. 2. 3. 5, то явно есть, что 60 на 2, на 3 и на 5 раздѣлится.

64.

Понеже вообще формула abcd, не только на a, b, c и d, раздѣлиться можетъ, но и на слѣдующiя: ab, ac, ad, bc, bd, и cd; такъ же на abc, abd, acd, bcd, и наконецъ на abcd, то есть на самую себя. То подобнымъ образомъ и 60 т. е. 2. 2. 3. 5, кромѣ что на простыя числа 2, 3, 5 но и на сложенныя изъ двухъ простыхъ, какъ 4, 6, 10, 15, да и на произшедшiя изъ трехъ простыхъ 12, 20, 30 и самаго себя 60 раздѣлиться можетъ.

65.

И такъ представивъ каждое число въ его простыхъ множителяхъ, весьма

легко показать всѣ тѣ числа, на которыя оное раздѣлиться можетъ, ибо надлежитъ только взять каждаго изъ простыхъ множителей особенно, потомъ 2, 3, 4 и такъ далѣе между собою помножить, пока дойдешъ до прежде помянутаго числа самаго.

66.

Паче всего примѣчать здѣсь должно, что каждое число на 1 раздѣлить можно, такъ же и на самаго себя, такъ что каждое число по меньшей мѣрѣ 2 хъ дѣлителей имѣетъ, т. е. 1 и самаго себя. Такія числа которыя кромѣ сихъ двухъ дѣлителей никакихъ другихъ не имѣютъ, суть тѣ же самыя, которыя выше сего простыми, первыми или первоначальными числами названы.

Но всѣ сложныя кромѣ 1 и самаго себя, еще другихъ дѣлителей имѣютъ, что изъ слѣдующей таблицы видѣть можно, гдѣ подъ каждымъ числомъ всѣ его дѣлители поставлены.

Таблица.

ТАБЛИЦА.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	3	2	5	2	7	2	3	2	11	2	13	2	3	2	17	2	19	2
			4		3		4	9	5		3		7	5	4		3		4
					6		8		10		4		14	15	8		6		5
											6				16		9		10
											12						18		20
1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5	2	6	2	6
пр. чис.	пр.	пр.		пр.		пр.				пр.		пр.				пр.		пр.	

67.

Наконецъ еще примѣчать должно, что 0 за такое число почитать надлежитъ, которое на всѣ возможныя числа раздѣлиться можетъ; потому что когда 0 на a раздѣлить должно, то въ частномъ числѣ всегда бываетъ 0; ибо 0 a составляетъ 0, и такъ весьма примѣчать надлежитъ, что всякое число умноженное 0мъ ничего не производитъ.

ГЛАВА VII.

О дробяхъ вообще.

68.

Когда число наприм. 7 на другое число какъ три раздѣлить не можно, то оное такъ разумѣть должно, что частнаго числа цѣлымъ числомъ изобразить не льзя; а не такъ чтобъ невозможно было имѣть о частномъ числѣ понятія.

Представь себѣ только линѣю въ 7 саженъ длиною, то никакого сомнѣнія не будетъ, чтобъ не возможно было раздѣлить сей линѣи на 3 равные части, и о величинѣ такой части имѣть понятія.

69.

Получа о частномъ числѣ въ такихъ случаяхъ произшедшемъ ясное понятіе, хотя оно и не цѣлое число, доходимъ чрезъ оное до познанія особливаго роду чиселъ, которыя *дробьми* или *ломаными числами* называются.

И по сему въ вышепомянутомъ примѣрѣ, гдѣ 7 на 3 раздѣлено быть должно, имѣемъ ясное понятїе о произходящемъ оттуду частномъ числѣ, которое обыкновенно слѣдующимъ образомъ изображается $\frac{7}{3}$, гдѣ въ верьху поставленное число 7 показываетъ дѣлимое число, а внизу поставленное 3 дѣлителя.

70.

И такъ когда вообще какое либо число a раздѣлить должно на b, то частное число изображается чрезъ $\frac{a}{b}$, которое начертанїе дробью называется. Чего ради никакого лучшаго понятїя о такой дроби $\frac{a}{b}$ дать не можно, какъ только сказать, что чрезъ то показывается частное число, которое произходитъ, когда верхнее число раздѣлишь на нижнее; при чемъ еще сїе примѣчать должно, что при всѣхъ такихъ дробяхъ верхнее число *числителемъ*, а нижнее *знаменателемъ* называется.

71.

Въ вышепомянутой дроби $\frac{7}{3}$, которая словами семь третей выговаривается,

7 есть числитель, а 3 знаменатель; равнымъ образомъ выговаривается и сія дробь $\frac{1}{2}$ одна половина, $\frac{2}{3}$ двѣ трети, $\frac{3}{4}$ три четверти, $\frac{3}{8}$ три осмины, $\frac{12}{100}$ двенадцать сотыхъ.

72.

Для полнаго свѣденія свойства дробей, разсмотримъ вопервыхъ тотъ случай, въ которомъ верхнее число равно нижнему, или числитель знаменателю, какъ $\frac{a}{a}$: понеже чрезъ сіе означается частное число произходящее когда а раздѣлишь на а, то слѣдуетъ изъ того, что сіе частное число есть точно 1: слѣдовательно дробь $\frac{a}{a}$ равна 1 или цѣлому, чего ради слѣдующіе дроби, какъ $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{8}{8}$ и такъ далѣе, равны между собою, и каждая изъ нихъ равна 1 цѣ или цѣлому.

73.

Понеже каждая дробь, коей числитель равенъ знаменателю ни больше ни меньше единицы, то всѣ такія дроби, которыхъ числители меньше знаменателей, меньше

меньше единицы. И такЪ когда меньшее число на большее раздѢлить должно, то выдетЪ дробь меньше единицы, когда наприм. линѢю вЪ двѢ сажени на три равныя части раздѢлить должно; то одна часть безЪ сомнѢнїя меньше будетЪ одной сажени: чего ради $\frac{2}{3}$ меньше 1цы потому, что числитель 2 меньше знаменателя 3 хЪ.

74.

Есть ли напротивЪ того числитель больше знаменателя, то дробь будетЪ больше единицы, по сему $\frac{3}{2}$ больше 1цы, понеже $\frac{3}{2}$ равны $\frac{2}{2}$ и $\frac{1}{2}$, а $\frac{2}{2}$ равны 1 цѢ, то $\frac{3}{2}$ равны будутЪ 1 т. е. цѢлому и еще $\frac{1}{2}$ слѢдовательно 1 $\frac{1}{2}$. РавнымЪ образомЪ и $\frac{4}{3}$ равны 1 $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{3}$ равны 1 $\frac{2}{3}$, а $\frac{7}{3} = 2\,\frac{1}{3}$.

И вообще должно вЪ такихЪ случаяхЪ верхнее число раздѢлить только на нижнее, и кЪ частному числу придать еще дробь, которыя числитель есть остатокЪ, а знаменатель дѢлитель, и такЪ для дроби $\frac{43}{12}$ раздѢливЪ 43 на 12

вЪ

вЪ частномЪ числѢ будетЪ 3, а вЪ остаткѢ 7, слѢдовательно $\frac{43}{12}$ равны 3 $\frac{7}{12}$.

75.

ИзЪ сего видно, какимЪ образомЪ дроби, коихЪ числители больше знаменателей, на 2 части разрѢшить можно, изЪ которыхЪ первая есть цѢлое число, а другая дробь, которыя числитель меньше знаменателя: по чему такïя дроби, гдѢ числитель больше знаменателя *неправильными* называются, ибо они 1 цу или больше цѢлыхЪ вЪ себѢ содержатЪ. НапротивЪ того *правильными дробями* тѢ, которыхЪ числитель меньше знаменателя, слѢдовательно меньше 1 цы или цѢлаго.

76.

Свойство дробей можно еще и другимЪ яснѢйшимЪ образомЪ представить. Напр. есть ли взять вЪ разсужденïе дробь $\frac{3}{4}$, то явствуетЪ, что она 3 жды больше $\frac{1}{4}$, а знаменованïе дроби $\frac{1}{4}$ состоитЪ вЪ томЪ, что когда 1 цу раздѢлишь на 4 равныя части, то такая часть покажетЪ знаменованïе оной, и такЪ 3 такïе

кїе части вмѣстѣ взятыя, составляютъ дробь $\frac{3}{4}$.

То же самое бываетъ и при каждой другой дроби какъ $\frac{7}{12}$, когда 1цу раздѣлишь на 12 равныхъ частей, то 7 такихъ частей составятъ помянутую дробь.

77.

Изъ сего примѣра произошли и вышепомянутые имена *числит ля* и *знаменателя*: ибо въ прежней дроби $\frac{7}{12}$ нижнее число показываетъ, что 1 на 12 равныхъ частей раздѣлить должно, то есть: когда оно опредѣляетъ сїе число частей, то удобно его *знаменателемъ* называютъ.

А поелику верхнее число 7 показываетъ, что для помянутой дроби, 7 такихъ частей взять надлежитъ, то для сей причины *числителемъ* его и назвали.

78.

Мы разсуждаемъ теперь о дробяхъ, у которыхъ *числитель* 1 и на которыхъ всѣ другїе дроби основаны: ибо не

не трудно уже понять знаменованїе $\frac{3}{4}$, когда извѣстно, что значитъ $\frac{1}{4}$ такъ какъ и слѣдующїе дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{13}$ и такъ далѣе: причемъ примѣчать надлежитъ, что сїи дроби всегда меньше становятся, чѣмъ больше будетъ число, на которое дѣлится единица, какъ наприм. $\frac{1}{100}$ часть гораздо меньше, нежели $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{1000}$ меньше, нежели $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{10000}$ меньше, нежели $\frac{1}{1000}$ и такъ далѣе.

79.

Изъ сего явствуетъ, что чѣмъ больше у такихъ дробей становится *знаменатель*, тѣмъ меньше должно быть знаменованїе оныхъ. Откуду раждается слѣдующей вопросъ: не можетъ-ли знаменатель быть такъ великъ, чтобъ дробь совсѣмъ изчезла и въ ничто обратилась? но сїе по справедливости опровергается: ибо на сколько равныхъ частей единицу, наприм. длину одной сажени ни раздѣлишъ, однако тѣ части всегда будутъ имѣть нѣкоторую величину, и слѣдовательно не ничто.

80.

Хотя и правда, что когда длину одной сажени раздѣлишь больше нежели на 1000 равныхъ частей, то оные части едва глазами видѣть можно; но какъ скоро на оныя въ хорошей микроскопъ посмотришь, то покажутся такъ великими, что еще на 1000 или больше равныхъ частей раздѣлить можно.

Но здѣсь не о томъ рѣчь, что мы здѣлать можемъ, или что въ самомъ дѣлѣ можетъ здѣлаться, и что еще усмотрѣть можно; но паче о томъ, что само собою возможно. И такъ справедливо, что какъ бы ни великъ былъ взятъ знаменатель, дробь вовсе изчезнуть, или въ ничто или въ 0 обратиться не можетъ.

81.

Понеже дробь совсѣмъ изчезнуть не можетъ, какъ бы знаменатель ни увеличился, но сохраняетъ еще нѣкоторую величину, то изъ сего слѣдуетъ, что вышепомянутой рядъ дробей безконечно

продолжаться можетъ: почему обыкновенно говорится, что знаменателю надлежало бы быть безконечно великому, что бы дробь въ о или въ ничто обратилася; ибо слово *безконечно* не иное что здѣсь значитъ, какъ что въ помянутомъ дробей ряду никогда къ концу не придешъ.

82.

Для представленія сего на твердомъ основаніи положеннаго понятія, употребляютъ знакъ ∞, которой безконечно великое число означаетъ; и для того можно сказать, что дробь $\frac{1}{\infty}$ есть дѣйствительно ничего; по тому что такая дробь до тѣхъ поръ ни вочто обратиться не можетъ, пока знаменатель безконечно не увеличится.

83.

Сіе понятіе о безконечныхъ, тѣмъ наипаче примѣчанія достойно, что оно изъ первыхъ основаній нашего познанія выведено, и впредь весьма важно и полезно будетъ. Можно ужѐ и здѣсь изъ

того

того вывести изрядныя и нашего примѣчанія достойныя слѣдствія. Понеже дробь $\frac{1}{\infty}$ показываетъ частное, когда дѣлимое 1 раздѣлишь на дѣлителя ∞; но извѣстно также, что когда дѣлимое 1 на частное число $\frac{1}{\infty}$ или 0, какъ мы прежде видѣли, раздѣлишь, выдетъ дѣлитель ∞; то получаемъ изъ того новое понятіе о безконечныхъ, а имянно, что оныя произходятъ, когда 1 раздѣлишь на 0: слѣдовательно по справедливости сказать можно, что 1 раздѣленная на 0 безконечно великое число или ∞ означаетъ.

84.

Здѣсь должно изтребить нарочито застарѣвшуюся погрѣшность: многіе утверждаютъ, что безконечно великое увеличено быть далѣе не можетъ; но сіе съ вышепомянутыми твердыми основаніями не согласно.

Ибо когда $\frac{1}{0}$ безконечно великое число означаетъ, то $\frac{2}{0}$ конечно дважды больше перваго; изъ сего слѣдуетъ, что

безконечно великое число еще дважды больше быть можетъ.

ГЛАВА VIII.

о свойствахъ дробей.

85.

Какъ мы выше сего видѣли, что всѣ такія дроби какъ: $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{9}{9}$ и проч. цѣлое составляютъ, и слѣдующія $\frac{2}{1}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{10}{5}$ и такъ далѣе также между собою равны; потому что каждая изъ нихъ даетъ два цѣлыя, ибо числитель каждой дроби раздѣленной на своего знаменателя 2 производитъ; равнымъ образомъ и сіи дроби $\frac{3}{1}$, $\frac{6}{2}$, $\frac{9}{3}$, $\frac{12}{4}$, $\frac{15}{5}$, $\frac{18}{6}$ и такъ далѣе суть равны между собою; потому что знаменованіе каждыя есть 3.

86.

Подобнымъ образомъ можно знаменованіе каждой дроби многоразличными образами представить; ибо когда числителя и знаменателя какой нибудь дроби

взя-

взятымЪ по изволенїю числомЪ помножишь, то новая дробь тожЪ самое знаменованїе получаетЪ. И такЪ всѢ сїи дроби какЪ:

$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{7}{14}$, $\frac{8}{16}$, $\frac{9}{18}$ и такЪ далѢе, равны между собою, и каждая равна $\frac{1}{2}$. РавнымЪ образомЪ и сїи дроби какЪ:

$\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{5}{15}$, $\frac{6}{18}$, $\frac{7}{21}$ и такЪ далѢе равны между собою и каждая равна $\frac{1}{3}$ также и сїи:

$\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{18}$, $\frac{14}{21}$, $\frac{16}{24}$ и такЪ далѢе, равны между собою; чего ради сїя дробь $\frac{a}{b}$ обще слѢдующими образы представлена быть можетЪ. КакЪ наприм.

$\frac{a}{b}$, $\frac{2a}{2b}$, $\frac{3a}{3b}$, $\frac{4a}{4b}$, $\frac{5a}{5b}$ и такЪ далѢе изЪ коихЪ каждая дробь равна первой $\frac{a}{b}$.

87.

Но что бы сїе доказать, то вмѢсто дробнаго числа $\frac{a}{b}$ напиши особливую букву c, что бы c значило частное чило когда a на b раздѢлится; но какЪ уже́ показано, что по умноженїи частного

наго числа c дѣлителемъ b несомнѣнно дѣлимому вытти должно; и понеже c умноженное на b даетъ a, то c умноженное на 2 b дастъ 2 a, а c умноженное на 3 b дастъ 3 a, то и вообще c умноженное на mb несомнѣнно ma дать долженствуетъ.

А естьли здѣлаешь изъ сего примѣръ дѣленія и произведеніе ma раздѣлишь на одного множителя m b, то должно частное вытти равно другому множителю c; но ma раздѣленное на mb даетъ дробь $\frac{ma}{mb}$, которой частному числу слѣдуетъ быть c, а c равно знаменованію дроби $\frac{a}{b}$: то дробь $\frac{ma}{mb}$ должна быть равна дроби $\frac{a}{b}$. Вмѣсто m можно взять число по своему изволенію.

88.

Понеже всякую дробь различными образами представить можно, изъ которыхъ всѣ тоже самое знаменованіе въ себѣ заключаютъ; то безсомнѣнія такая дробь понятнѣе, которая состо-

итъ

итъ изъ малѣйшихъ чиселъ, какъ напр. когда вмѣсто $\frac{2}{3}$ по изволенїю каждая изъ сихъ дробей какъ $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{18}$ и такъдалѣе, постановлена быть можетъ, то никто не усумнится, чтобъ дробь $\frac{2}{3}$ не была внятнѣе протчихъ; причемъ сїе спрашивается, какимъ образомъ дробь, въ большихъ числахъ состоящую, какъ напр. $\frac{8}{12}$ привесть въ состоящую изъ малѣйшихъ, т. е. въ $\frac{2}{3}$.

89.

Вопросъ сей легко рѣшить можно, естьли только припомнимъ, что дробь не перемѣняетъ своего знаменованїя, когда ея числитель и знаменатель однимъ числомъ помножится: изъ чего слѣдуетъ, что когда числитель и знаменатель какой нибудь дроби, на одно число раздѣлены будутъ, то дробь силы своея не перемѣнитъ, что легче всего изъ изображенной вообще дроби $\frac{na}{nb}$ усмотрѣть можно; ибо когда числителя na и знаменателя nb раздѣлить на n, то выдетъ дробь $\frac{a}{b}$ которая равна прежней дроби $\frac{na}{nb}$, какъ выше сего показано.

90.

Для изображенія дроби малыми числами, надлежитъ найти такія числа, на которыя бы какъ числитель, такъ и знаменатель могъ раздѣлиться: такое число называется *общимъ дѣлителемъ*; а пока числитель и знаменатель общаго дѣлителя не имѣютъ, дотого и дроби меньшими числами изобразить не можно; а ежели никакого дѣлителя нѣтъ кромѣ 1, то значитъ, что дробь ужé самыми малыми изображена числами.

91.

Чтобъ сіе изъяснить обстоятельнѣе, возмемъ въ разсужденіе дробь $\frac{48}{120}$, гдѣ тотчасъ видимъ, что числитель и знаменатель на 2 раздѣлиться можетъ: откуда произойдетъ дробь $\frac{24}{60}$, которой числителя и знаменателя можно такожде раздѣлить на 2, и произойдетъ слѣдующая дробь $\frac{12}{30}$, гдѣ еще общей дѣлитель есть 2 и произойдетъ $\frac{6}{15}$; здѣсь видно, что числитель и знаменатель еще на 3 раздѣлиться могутъ, откуда произойдетъ

дробь

дробь $\frac{2}{5}$, которая равна будетъ предложенной и въ самыхъ меньшихъ числахъ представлена; потому что 2 и 5 общаго дѣлителя не имѣютъ кромѣ 1, отъ котораго числа ужé не уменшатся.

92.

Сїе свойство дробей, что когда числитель и знаменатель однимъ числомъ помножатся или на него раздѣлятся, дроби не перемѣнятся, есть весьма важно, и наономъ вообще все ученїе о дробяхъ утверждается; потому что двухъ дробей ни вмѣстѣ сложить ни одну изъ другой вычесть не можно, пока не превращены будутъ въ такїя дроби, коихъ знаменатели равны между собою, о чемъ въ слѣдующей главѣ предложено будетъ пространнѣе.

93.

Здѣсь еще упомянемъ, что цѣлыя числá во образѣ дроби представлены быть могутъ. Какъ напр. 6 равны $\frac{6}{1}$, потому что 6 раздѣленное на 1 даетъ 6, отку-

 да

да слѣдующіе образы дробей произходятъ, какъ:

$\frac{12}{2}$, $\frac{18}{3}$, $\frac{24}{4}$, $\frac{30}{5}$, $\frac{36}{6}$, и такъ далѣе, которые всѣ одну силу или знаменованіе имѣютъ, т. е. 6.

ГЛАВА IX.

О сложеніи и вычитаніи дробей.

94.

Дроби одинакихъ знаменателей весьма легко сложить и вычесть можно; ибо $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$ даютъ $\frac{5}{7}$ а $\frac{4}{7}-\frac{2}{7}$ даютъ $\frac{2}{7}$. Въ семъ случаѣ складываются и вычитаются только одни числители, а внизу подписывается общій знаменатель, какъ напр. $\frac{7}{100}+\frac{9}{100}-\frac{12}{100}-\frac{15}{100}+\frac{20}{100}$ даютъ $\frac{9}{100}$; а $\frac{24}{50}-\frac{7}{50}-\frac{12}{50}+\frac{31}{50}$ даютъ $\frac{36}{50}$ или $\frac{18}{25}$, $\frac{16}{20}-\frac{3}{20}-\frac{11}{20}+\frac{14}{20}$ составляютъ $\frac{16}{20}$ или $\frac{4}{5}$, также $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$ равны $\frac{3}{3}$ или 1, а $\frac{2}{4}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$ даютъ $\frac{0}{4}$ т. е. ничего.

95.

А разныхъ знаменателей дроби можно привесть къ одному. Такъ когда

сїи дроби $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ сложить должно, то понеже $\frac{1}{2}$ равна $\frac{3}{6}$ а $\frac{1}{3}$ равна $\frac{2}{6}$; по чему вмѣсто прежнихъ дробей будемъ имѣть сїи $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}$, которыя даютъ $\frac{5}{6}$: а $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ подобнымъ образомъ приведенные къ одному знаменателю съ той перемѣною, что — между оными поставленъ, $\frac{3}{6}-\frac{2}{6}$ даютъ $\frac{1}{6}$. Пусть еще будутъ слѣдующїя дроби: какъ $\frac{3}{4}+\frac{5}{8}$, то понеже $\frac{3}{4}$ равны $\frac{6}{8}$, можно на мѣсто $\frac{3}{4}$ поставить $\frac{6}{8}$ и такъ $\frac{6}{8}+\frac{5}{8}$ даютъ $\frac{11}{8}$ или $1\frac{3}{8}$. Когда спрашивается сколько $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$ вмѣстѣ составляютъ, то пишутъ вмѣсто оныхъ $\frac{4}{12}$ и $\frac{3}{12}$, которыя $\frac{7}{12}$ составляютъ.

96.

Ежели больше двухъ дробей дано будетъ, какъ наприм. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, кои къ одному знаменателю привесть должно, то все дѣло состоитъ въ томъ, чтобъ найти число, которое на всѣ сїи знаменатели раздѣлиться можетъ, такое въ семъ случаѣ есть 60, которое есть оной общей знаменатель; и такъ вмѣсто $\frac{1}{2}$ поставить $\frac{30}{60}$, вмѣсто $\frac{2}{3}$ поставить

вить $\frac{40}{60}$, вмѣсто $\frac{3}{4}$, $\frac{45}{60}$, вмѣсто $\frac{4}{5}$, $\frac{48}{60}$, вмѣсто $\frac{5}{6}$, $\frac{50}{60}$; и ежели сіи дроби $\frac{30}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$, $\frac{50}{60}$ вмѣстѣ сложить должно, то числители ихъ составятъ $\frac{213}{60}$ или 3 цѣлыхъ и $\frac{33}{60}$ или 3 $\frac{11}{20}$.

97.

И такъ все дѣло къ тому клонится, что бы двѣ дроби разныхъ знаменателей имѣющія превратить въ такіе, коихъ бы знаменатели равны были между собою. А чтобъ сіе общимъ образомъ учинить, то пусть будутъ помянутыя дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$: умножь перьвую дробь въ верьху и въ низу на d, то получишь $\frac{ad}{bd}$, которая будетъ равна $\frac{a}{b}$; потóмъ умножъ и другую такъ какъ и прежнюю въ верьху и въ низу на b, то получишь мѣсто оной $\frac{bc}{bd}$, и такъ знаменатели теперь равны между собою, чего ради сумма оныхъ дробей будетъ $\frac{ad+bc}{bd}$, а разность $\frac{ad-bc}{bd}$. И такъ ежели предложены будутъ дроби $\frac{5}{8}$ и $\frac{7}{9}$, то получишь мѣсто оныхъ сіи $\frac{45}{72}$ и $\frac{56}{72}$.

98.

98.

Здѣсь также случается вопросъ: которая изъ двухъ данныхъ дробей больше или меньше другой, какъ то изъ сихъ двухъ $\frac{2}{3}$ и $\frac{5}{7}$ которая больше? для сего надлежитъ только обѣ дроби привести къ одному знаменателю, то вмѣсто первой получишь $\frac{14}{21}$, а вмѣсто другой $\frac{15}{21}$, изъ чего видно, что $\frac{5}{7}$ больше нежели $\frac{2}{3}$ а именно $\frac{1}{20}$ долею. Ежели еще даны будутъ напримѣръ сіи дроби $\frac{3}{5}$ и $\frac{5}{8}$, то вмѣсто ихъ получишь $\frac{24}{40}$ и $\frac{25}{40}$, изъ чего видно, что $\frac{5}{8}$ больше $\frac{3}{5}$, но токмо $\frac{1}{40}$ долею.

99.

Ежели дробь изъ цѣлаго числа́ вычесть должно, какъ $\frac{2}{3}$ изъ 1, то мѣсто 1 можно поставить $\frac{3}{3}$, изъ чего тотчасъ увидишь что въ остаткѣ будетъ $\frac{1}{3}$; также $\frac{5}{12}$ вычтенные изъ 1 даютъ $\frac{7}{12}$, а ежели $\frac{3}{4}$ должно вычесть изъ 2, то вмѣсто 2хъ поставь только 1 и $\frac{4}{4}$, то останется 1 и $\frac{1}{4}$. Впрочемъ извѣстно, что когда дробь къ цѣлому числу придать

дать должно , то поставь оное просто при оной дроби , какъ наприм. $\frac{2}{3}$ приданныя къ 6 , даютъ 6 и $\frac{2}{3}$ или $6\frac{2}{3}$.

100.

Случается иногда , что двѣ дроби или больше вмѣстѣ сложенныя больше одного цѣлаго составляютъ , что изъ слѣдующихъ примѣровъ явствуетъ : яко $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$ или $\frac{8}{12}+\frac{9}{12}$ даютъ $\frac{17}{12}$ то есть $1\frac{5}{12}$ тожъ самое бываетъ, когда многія цѣлыя числа и дроби сложить должно , то сложи сперва дроби , и естьли сумма выдетъ цѣлое или больше цѣлаго одного , то приложи оныя потóмъ къ цѣлымъ числамъ. И такъ когда спрашивается , что $3\frac{1}{2}$ и $2\frac{2}{3}$ вмѣстѣ составляютъ ? то дроби $\frac{3}{6}$ и $\frac{4}{6}$ сложенныя вмѣстѣ даютъ $\frac{7}{6}$, что съ цѣлыми числами 6 и $\frac{1}{6}$ составляютъ.

ГЛАВА

ГЛАВА X.

Объ умноженіи и дѣленіи.

101.

Ежели дробь должно будетъ умножить цѣлымъ числомъ, то помножь онымъ числителя, а знаменателя оставь непремѣнна, какъ напр. 2ды $\frac{1}{2}$ дѣлаетъ $\frac{2}{2}$ или 1; 2ды $\frac{1}{3}$ дѣлаетъ $\frac{2}{3}$; 3ды $\frac{1}{6}$ составляетъ $\frac{3}{6}$ или $\frac{1}{2}$; 4ды $\frac{5}{12}$ составляютъ $\frac{20}{12}$ или 1 цѣлое и $\frac{8}{12}$ или $\frac{2}{3}$, изъ сего выводятъ слѣдующее правило: когда дробь цѣлымъ числомъ помножить должно, то или числителя помножъ, или знаменателя раздѣли на оное цѣлое число, и сіе послѣднее правило сокращаетъ изчисленіе, какъ напр. $\frac{8}{9}$ умноженныя 3мя даютъ $\frac{8}{3}$ т. е. 2 и $\frac{2}{3}$, также $\frac{13}{24}$ умноженныя 6тью даютъ $\frac{13}{4}$ или $3\frac{1}{4}$.

102.

И такъ вообще когда дробь $\frac{a}{b}$ умножить должно на c, то выдетъ $\frac{ac}{b}$; при семъ

семъ примѣчать надлежитъ, что когда цѣлое число точно равно знаменателю, то произведеніе равно будетъ тогда числителю, какъ напр.

$\frac{1}{2}$ дважды взятая даетъ 1.

$\frac{2}{3}$ умноженное тремя даетъ 2.

$\frac{3}{4}$ умноженное четырмя даетъ 3.

И вообще, когда дробь $\frac{a}{b}$ умножена будетъ числомъ b, то произведеніе выдетъ a, чему основаніе ужѐ выше сего положено; ибо выше изчислено, что $\frac{a}{b}$ частное число изъявляетъ дѣлимаго a, раздѣленнаго на b, и притомъ показано, что частное число умноженное дѣлителемъ произвесть должно дѣлимое, то изъ сего слѣдуетъ, что $\frac{a}{b}$ умноженное на b должно дать a.

103.

Показавъ теперь умноженіе дроби цѣлымъ числомъ, надлежитъ намъ также показать какимъ образомъ дробь на цѣлое число раздѣлить можно, прежде нежели приступимъ мы къ изъясненію умноженія дроби дробью; но сіе ясно, что

что когда я дробь $\frac{2}{3}$ раздѣлю на 2, то вЪ частномЪ будетЪ $\frac{1}{3}$, также когда $\frac{6}{7}$ раздѣлю на 3, вЪ частномЪ числѣ выдетЪ $\frac{2}{7}$; изЪ сего слѣдуетЪ, что числителя на цѣлое число раздѣлить должно, а знаменателя оставить непремѣнна, какЪ напр. $\frac{12}{25}$ разд. на 2 даютЪ $\frac{6}{25}$
$\frac{12}{25}$ разд. на 3 даютЪ $\frac{4}{25}$
$\frac{12}{25}$ разд. на 4 даютЪ $\frac{3}{25}$
и такЪ далѣе.

104.

И такЪ нѣтЪ вЪ семЪ дѣлѣ никакой трудности, когда числитель на данное цѣлое число раздѣлиться можетЪ; а ежели не можетЪ, то надлежитЪ припомнить, что каждую дробь вЪ безконечно многїя другїя превращать можно, между которымЪ числомЪ новыхЪ дробей несомнѣнно найдется и такая, коея числитель на данное число раздѣлиться можетЪ. КакЪ наприм. ежели $\frac{3}{4}$ раздѣлить должно на 2, то приведи сїю дробь вЪ $\frac{6}{8}$, отЪ чего по раздѣленїи оной на 2 произойдетЪ $\frac{3}{8}$.

Естьли вообще дробь $\frac{a}{b}$ раздѣлить должно на с, то приведи оную дробь въ $\frac{ac}{bc}$, коея числитель ac раздѣленной на c дастъ a, и такъ искомое частное число будетъ $\frac{a}{bc}$.

105.

Изъ сего явствуетъ, что когда дробь $\frac{a}{b}$ раздѣлить должно на цѣлое число c, то надлежитъ только знаменателя b умножить симъ цѣлымъ числомъ; а числителя не перемѣнять, какъ напр. $\frac{5}{8}$ раздѣленные на 3, даютъ $\frac{5}{24}$; $\frac{9}{16}$ раздѣленные на 5, даютъ $\frac{9}{80}$; но когда самаго числителя на цѣлое число раздѣлить можно, то вычисленïе тѣмъ будетъ легче, какъ напр. $\frac{9}{16}$ раздѣленные на 3 даютъ $\frac{3}{16}$, а другимъ образомъ $\frac{9}{48}$, которая дробь однако равна помянутой $\frac{3}{16}$; ибо $\frac{9}{48} \Big| \overset{3}{\frac{3}{16}}$.

106.

Теперь можемъ мы показать, какимъ образомъ дробь $\frac{a}{b}$ умножить должно на дробь $\frac{c}{d}$. Надлежитъ только помнить

что

что $\frac{c}{d}$ есть c раздѣленное на d и такъ должно только сперьва дробь $\frac{a}{b}$ умножить на c, и произойдетъ $\frac{ac}{b}$, потомъ роздѣлить на d и выйдетъ $\frac{ac}{bd}$; изъ чего слѣдуетъ, что въ умноженїи двухъ дробей между собою, надлежитъ сперьва числителей, а потомъ знаменателей особо между собой помножить, такъ на прим. $\frac{1}{2}$ умноженная на $\frac{2}{5}$ даетъ $\frac{2}{10}$ или $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$ умноженные на $\frac{4}{5}$ даютъ $\frac{8}{15}$; $\frac{3}{4}$ умноженные на $\frac{5}{12}$ даютъ $\frac{15}{48}$ или $\frac{5}{16}$, и такъ далѣе.

107.

Теперь осталось показать, какимъ образомъ одну дробь на другую раздѣлить должно; причемъ вопервыхъ примѣчать надлежитъ, что когда дроби одинакихъ имѣютъ знаменателей, то дѣленїе окончится въ числителяхъ, потому что наприм. $\frac{3}{12}$ въ $\frac{9}{12}$ столько же разъ содержатся сколько 3 въ 9 т. е. 3жды; чего ради когда $\frac{8}{12}$ на $\frac{9}{12}$ раздѣлить должно будетъ, то надлежитъ только 8 раздѣлить на 9 отъ чего

произойдетъ $\frac{8}{9}$. $\frac{6}{20}$ въ $\frac{18}{20}$ содержится 3жды. $\frac{7}{100}$ въ $\frac{49}{100}$ содержится 7 разъ; $\frac{6}{25}$ на $\frac{7}{25}$ разделенныя даютъ $\frac{6}{7}$, также $\frac{3}{7}$ на $\frac{4}{7}$ даютъ $\frac{3}{4}$

108.

А разныхъ знаменателей имѣющія дроби можно привести къ одинакимъ; такъ когда дробь $\frac{a}{b}$ раздѣлить должно на $\frac{c}{d}$, то приведи сперьва сіи дроби къ одному знаменателю, и получишь дѣлимую $\frac{ad}{bd}$, а дѣлителя $\frac{bc}{bd}$; откуду слѣдуетъ, что только числителя перьвой дроби ad на числителя послѣдней bc раздѣлить должно, слѣдов. искомое частное будетъ $\frac{ad}{bc}$.

Изъ сего слѣдующее выходитъ правило: числителя дѣлимаго числа́ надлежитъ помножить знаменателемъ дѣлителя, а знаменателя дѣлимаго числа́ числителемъ дѣлителя: то перьвое произведеніе числителя, а послѣднее дастъ знаменателя въ частномъ числѣ.

109.

И такъ когда $\frac{5}{8}$ раздѣлить должно будетъ на $\frac{2}{3}$, то въ частномъ числѣ

по

по сему правилу выдетъ $\frac{15}{16}$; ежели $\frac{3}{4}$ на $\frac{1}{2}$ раздѣлить должно, то получишь $\frac{6}{4}$ или $\frac{3}{2}$ т. е. 1 и $\frac{1}{2}$, ежели же $\frac{25}{48}$ раздѣлишь на $\frac{5}{6}$, то получишь $\frac{30}{48}$ или $\frac{5}{8}$.

110.

Сїе правило дѣленїя удобнѣе слѣдующимъ предложится образомъ: дробь, на которую дѣлить должно, переворота поставя знаменателя ея въ верьху, а числителя въ низу, и умножъ дробь дѣлимую на сїю обращенную, и будетъ произшедшее произведенїе искомое частное число. Такъ наприм. $\frac{3}{4}$ раздѣленные на $\frac{1}{2}$ равны $\frac{3}{4}$ умноженнымъ на $\frac{2}{1}$, изъ чего произойдетъ $\frac{6}{4}$ или $1\frac{1}{2}$; также $\frac{5}{8}$ раздѣленные на $\frac{2}{3}$ равны $\frac{5}{8}$ умноженнымъ на $\frac{3}{2}$, отъ чего произойдетъ $\frac{15}{16}$. Подобно $\frac{25}{48}$ раздѣленные на $\frac{5}{6}$, тоже что и $\frac{25}{48}$ умноженные на $\frac{6}{5}$, отъ чего произойдетъ $\frac{15}{24}$ или какъ выше сего $\frac{5}{8}$.

И такъ вообще видно, что на дробь $\frac{1}{2}$ раздѣленное что нибудь, тожъ самое есть что и $\frac{2}{1}$ т. е. 2мя умножен-

ное, на $\frac{1}{3}$ раздѣленное тоже что и $\frac{3}{1}$ т. е. 3мя умноженное.

111.

Чего ради ежели 100 раздѣлишь на $\frac{1}{2}$, то въ частномъ числѣ будетъ 200, а 1000 на $\frac{1}{3}$ частное будетъ 3000; когдаже 1 раздѣлишь на $\frac{1}{1000}$, въ частномъ будетъ 1000; а 1 на $\frac{1}{100000}$ въ частномъ даетъ 100000: изъ сего понять можно, что 1 на 0 раздѣленная въ частномъ дастъ число безмѣрно великое, потому что когда 1 раздѣлишь на сію малую дробь $\frac{1}{1000000000}$, въ частномъ числѣ будетъ сіе великое число 1000000000.

112.

Когда дробь саму на себя раздѣлить должно, то разумѣется, что частное число будетъ 1; потому что каждое число само на себя раздѣленное даетъ 1: тоже самое показываетъ и наше правило, когда наприм. $\frac{3}{4}$ раздѣлить должно на $\frac{3}{4}$, то умножъ $\frac{3}{4}$ на $\frac{4}{3}$ откуда получишь $\frac{12}{12}$ т. е. 1; а когда $\frac{a}{b}$

раздѣлить должно на $\frac{a}{b}$, то умножъ $\frac{a}{b}$ на $\frac{b}{a}$ и произойдетъ $\frac{ab}{ab}$ т. е. 1.

113.

Еще осталось изъяснить употребительную рѣчь въ Ариѳметикѣ, какъ наприм. когда говорится половина $\frac{3}{4}$хъ, то сїе есть тоже, что $\frac{3}{4}$ умноженныя $\frac{1}{2}$ю, также когда спрашивается что есть $\frac{2}{3}$ дроби $\frac{5}{8}$хъ, то найдешь сїе ежели $\frac{5}{8}$ умножишь на $\frac{2}{3}$, произведенїе $\frac{10}{24}$ будетъ искомое. Такъ $\frac{3}{4}$ дроби $\frac{9}{16}$ будетъ произведенїе $\frac{27}{64}$, что весьма наблюдать должно, когда сїя рѣчь ни случится.

114.

Наконецъ надлежитъ здѣсь въ рассужденїи знаковъ + и — тоже самое примѣчать что выше сего при цѣлыхъ числахъ показано было, такъ наприм. + $\frac{1}{2}$ умноженная на — $\frac{1}{3}$ дастъ — $\frac{1}{6}$; — $\frac{2}{3}$ умноженные на $\frac{4}{5}$ даютъ + $\frac{8}{15}$; — $\frac{3}{5}$ раздѣленные на + $\frac{2}{3}$ даютъ — $\frac{10}{10}$, — $\frac{3}{4}$ раздѣленные на — $\frac{3}{4}$ даютъ + $\frac{12}{12}$ или + 1.

ГЛАВА XI.

о квадратныхъ числахъ.

115.

Когда какое число само собою помножено будетъ : то произведеніе называется *квадратомъ*, въ рассужденіи котораго то число, изъ коего оное произошло, *радиксомъ* его *квадратнымъ* или *корнемъ квадратнымъ* называется.

И такъ, когда напр. 12 умножено будетъ на 12, произведеніе будетъ 144 квадратное число, котораго корень есть 12.

Основаніе сего названія взято изъ Геометріи, гдѣ симъ образомъ находится величина площади квадрата, то есть : ежели сторона онаго сама собою помножится.

116.

Чего ради всѣ квадратныя числа́ сыскиваются помощію умноженія, когда

корни

корни сами собою помножены будутъ. Такъ напр: понеже 1 умноженная на 1 дастъ 1, то 1 будетъ квадратъ 1.

На противъ того 4 есть квадратъ 2хъ, а 2 квадратной корень 4хъ.

Также 9 квадратъ 3хъ, а 3 квадратной корень 9ти. Разсмотримъ теперь квадраты натуральныхъ чиселъ, которыхъ числа́ или корни въ первомъ ряду, а квадраты ихъ во второмъ представлены.

числа	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
квадр:	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289

117.

Въ сихъ по порядку поставленныхъ квадратныхъ числахъ, видимъ мы изрядное свойство въ томъ состоящее, что когда каждое изъ слѣдующаго вычтено будетъ, остатки составятъ слѣдующей рядъ чиселъ.

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, и такъ далѣе, которые всѣ двумя возрастаютъ и составляютъ рядъ нечетныхъ чиселъ.

118.

Подобнымъ образомъ сыскиваются и квадраты дробей; то есть: умноженіемъ дроби самой собою, такъ напр.

$\frac{1}{2}$ квадратъ $\frac{1}{4}$
$\frac{1}{3}$ квадратъ $\frac{1}{9}$
$\frac{2}{3}$ квадратъ $\frac{4}{9}$
$\frac{1}{4}$ квадратъ $\frac{1}{16}$
$\frac{3}{4}$ квадратъ $\frac{9}{16}$ и такъ далѣе.

Надлежитъ только квадратъ числителя раздѣлить на квадратъ знаменателя, и получишь квадратъ дроби, такъ наприм. дроби $\frac{5}{8}$ квадратъ $\frac{25}{64}$: и обратно $\frac{5}{8}$ есть корень $\frac{25}{64}$.

119.

Ежели хочешь найти квадратъ смѣшеннаго числа́, состоящаго изъ цѣлаго числа и дроби, то приведи только оное число въ дробь и возми ея квадратъ; такъ чтобъ сыскать квадратъ, $2\frac{1}{2}$ будетъ вопервыхъ $2\frac{1}{2}$ равно $\frac{5}{2}$; и слѣдовательно квадратъ $\frac{25}{4}$, что составляетъ $6\frac{1}{4}$, по сему $6\frac{1}{4}$ есть квадратъ $2\frac{1}{2}$. Также для сысканія квадрата $3\frac{1}{4}$ видимъ что $3\frac{1}{4}$ равна $\frac{13}{4}$

котораго

котораго квадратъ будетъ $\frac{169}{16}$, что составляетъ $10\frac{9}{16}$. Разсмотримъ теперь напр. квадраты чиселъ отъ 3 до 4 на одну четверть возвышающихся.

числа	3	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	4
квадрат.	9	$10\frac{9}{16}$	$12\frac{1}{4}$	$14\frac{1}{16}$	16

Изъ сего заключить можно, что когда корень есть дробь, то и квадрату дроби быть должно. Такъ напр. когда корень $1\frac{5}{12}$, то квадратъ его $\frac{289}{144}$, что составитъ $2\frac{1}{144}$, которое весьма малымъ числомъ превосходитъ 2.

120.

Когда вообще корень будетъ a, то квадратъ его будетъ aa, также корня 2a квадратъ будетъ 4aa; изъ чего видно, что когда радиксъ 2ды больше, то квадратъ будетъ 4ды больше. А корня 3a квадратъ будетъ 9aa, и корня 4a квадратъ 16aa, и такъ далѣе; ежели же корень будетъ ab то квадратъ его aabb, а корня abc квадратъ aabbcc.

121.

121.

И такЪ когда корень состоитЪ изЪ двухЪ или болѣе множителеи, то должно квадраты оныхЪ помножить, между собою; и обратно когда квадратЪ состоитЪ изЪ двухЪ или болѣе множителей, изЪ которыхЪ каждой квадратЪ, то надлежитЪ только помножить между собою корни оныхЪ, такЪ наприм. когда 2304 равны 4. 16. 36 то корень ихЪ квадратной 2. 4. 6 т. е. 48, и вЪ самомЪ дѣлѣ 48 есть корень квадратной изЪ 2304хЪ, потому что 48. 48 равны 2304.

122.

Теперь разсмотримЪ знаки + и —, что сЪ ними бываетЪ при квадратахЪ, изЪ чего тотчасЪ увидимЪ, что ежели корень имѣетЪ знакЪ + или будетЪ положительное (прибыточное) число, какое понынѣ нами принято, то квадратЪ онаго также положительное число быть должно; потому что + умноженное на + дастЪ вЪ произ-

ведeніи

веденіи +, и такъ квадратъ изъ + a будетъ + aa; а когда корень будетъ отрицательное (убыточное) число, какъ − a, то квадратъ его будетъ + aa, такъ какъ бы корень былъ + a: слѣдовательно + aa есть квадратъ какъ изъ + a, такъ и − a; почему каждаго квадратъ имѣетъ два корня квадратныхъ, изъ коихъ одинъ положительной, а другой отрицательной. Такъ корень квадратной 25ти, есть какъ + 5, такъ и − 5, потому что + 5 умноженное на + 5, и − 5 умноженное на − 5 даютъ + 25.

ГЛАВА XII.

О квадратныхъ корняхъ и произходящихъ оттуду неизвлекомыхъ числахъ.

123.

Изъ прежняго видно, что корень квадратной изъ даннаго числа, не что инное есть, какъ такое число, котораго квадратъ равенъ данному числу: такъ

такъ корень 4хъ есть 2, 9ти 3, 16ти 4, причемъ примѣчать должно, что сіи корни какъ съ положительными такъ и съ отрицательными знаками поставлены быть могутъ. Такъ изъ 25ти корень квадратной будетъ какъ + 5, такъ и − 5: потому что − 5 умноженные на − 5 также дѣлаютъ + 25, какъ и + 5 умноженные на + 5.

124.

И такъ когда данное число будетъ квадратъ, и квадратные числа потуду извѣстны, то легко можно найти его корень квадвратной: такъ когда бы данное число было 196, то извѣстно что корень квадратной онаго числа́ есть 14. Въ дробяхъ также нѣтъ трудности, и изъ прежняго видно, что изъ дроби $\frac{25}{49}$ корень квадратной есть $\frac{5}{7}$, потому что какъ числителя такъ и знаменателя корень квадратной взять можно. Ежели же данное число будетъ смѣшенное, какъ 12 $\frac{1}{4}$, то приведи оное въ одну дробь, какъ $\frac{49}{4}$ изъ которой корень квадратной

дратной будетъ $\frac{7}{2}$ или $3\frac{1}{2}$, слѣдовательно онъ же будетъ квадратной корень изъ $12\frac{1}{4}$.

125.

А когда данное число будетъ не квадратъ, какъ наприм. 12, то не можно найти или опредѣлить его корня квадратнаго, то есть: такого числа, которое бы само на себя помноженно, точно 12 составляло. Между тѣмъ однакожъ намъ извѣстно, что корень квадратной 12ти больше 3хъ, потому что 3. 3 дѣлаютъ только 9, а меньше 4хъ; потому что 4. 4 дѣлаютъ 16; извѣстно также намъ что оно должно быть меньше $3\frac{1}{2}$, ибо квадратъ сего числа больше 12, понеже $3\frac{1}{2}$ или $\frac{7}{2}$хъ квадратъ есть $12\frac{1}{4}$. Сей корень опредѣлится еще точняе положа его $3\frac{7}{15}$; ибо квадратъ сего числа есть $\frac{2704}{225}$, слѣдовательно $3\frac{7}{15}$ еще нѣсколько великъ. Понеже $3\frac{7}{15}$ или $\frac{52}{15}$хъ квадратъ $\frac{2704}{225}$ или $12\frac{4}{225}$.

126.

Когда $3\frac{1}{2}$ и $3\frac{7}{15}$ нѣсколько превышаютъ квадратной коренъ 12ти, то мо-

жно

жно думать, что когда мѣсто дроби $\frac{7}{15}$ другая нѣсколько меньше къ 3 придастся, квадратъ ея 12 произойти можетъ.

И такъ возмемъ $3\frac{3}{7}$ по тому, что $\frac{3}{7}$ нѣсколько меньше $\frac{7}{15}$хъ, а $3\frac{3}{7}$ равны $\frac{24}{7}$, коей квадратъ $\frac{576}{49}$ или $11\frac{37}{49}$; нѣсколько меньше 12, ибо 12 приведенные къ тому же знаменателю дѣлаютъ $\frac{588}{49}$, слѣдовательно меньше дробью $\frac{12}{49}$. Отсюду видимъ мы, что $3\frac{3}{7}$ малы, а $3\frac{7}{15}$ велики: чего ради возмемъ $3\frac{5}{11}$, потому что $3\frac{5}{11}$ больше $3\frac{3}{7}$, а меньше $3\frac{7}{15}$; когда $3\frac{5}{11}$ въ одну дробь приведенные составляютъ $\frac{38}{11}$, то квадратъ оттуду будетъ $\frac{1444}{121}$ или $11\frac{113}{121}$. Но 12 приведенные къ сему же знаменателю дѣлаютъ $\frac{1452}{121}$: слѣд $3\frac{5}{11}$ еще не достаютъ дробью $\frac{8}{121}$. Естьли же бы положили искомой корень $3\frac{6}{13}$, по елику $\frac{6}{13}$ нѣсколько больше $\frac{5}{11}$, то квадратъ бы изъ того былъ $\frac{2025}{169}$, т. е. $11\frac{166}{169}$; но 12 къ сему знаменателю приведенные даютъ $\frac{2028}{169}$, слѣдовательно $3\frac{6}{13}$ еще малы дробью $\frac{3}{169}$, а $3\frac{7}{15}$ велики.

127.

Но легко понять можно, что какую бы мы дробь къ 3мъ ни прикладывали, квадратъ ея всегда будетъ имѣть при себѣ дробь и слѣдовательно 12ти точно никогда не составитъ. Не смотря на то что мы знаемъ, что корень квадратной изъ 12 больше $3\frac{6}{13}$, а меньше $3\frac{7}{15}$, должно признаться, что между сими двумя дробями не можно найти такой, которая бы, естьли придадутся къ ней 3, точно произвела квадратной корень изъ 12. Между тѣмъ не можно сказать, чтобъ корень квадратной изъ 12 самъ собою опредѣленъ не былъ; а изъ показаннаго слѣдуетъ только, что онаго дробью изъявить не можно, хотя онъ и опредѣленную величину имѣетъ.

128.

Сїе ведетъ насъ къ новому роду чиселъ, коихъ дробями ни коимъ образомъ изъявить не можно, хотя они и опредѣленную величину имѣютъ, такъ

какъ мы при квадратномъ корнѣ изъ 12ти видѣли. Сей новой родъ чиселъ называется *неизплекомыми числами*, которые въ такомъ случаѣ произходятъ, когда надлежитъ искать квадратной корень изъ числа не квадратнаго. Такъ напр. 2 есть число не квадратное, то и корень квадратной изъ 2хъ, или то число, которое само на себя помножено точно 2 производитъ, есть число *неизплекомое* (ирраціональное) которые числа называются также и глухими числами, numeri ſurdi et irrationales.

129.

Хотя такихъ чиселъ никакою дробью представить нельзя, однакожъ о величинѣ оныхъ, имѣемъ мы ясное понятіе. Ибо напр. какъ бы квадратной корень 12ти ни сокровенъ казался; однако намъ извѣстно, что онъ есть такое число, которое само на себя умножено точно 12 производитъ: и сего свойства довольно дать намъ о семъ числѣ ясное понятіе; а особливо когда

мы

мы кЪ его величинѢ часЪ отЪ часу ближе подходить можемЪ.

130.

ИмѢя о такихЪ неизвлекомыхЪ числахЪ довольное понятїе употребляютЪ для означенїя корня квадратнаго изЪ чиселЪ не квадратныхЪ, знакЪ имѢющей фигуру $\sqrt{}$, которой словомЪ корень квадратной выговариваютЪ, такЪ $\sqrt{12}$ означиваетЪ то число, которое естли само на себя помножится, произведетЪ 12, или корень квадратной изЪ 12; равнымЪ образомЪ $\sqrt{2}$ показываетЪ корень квадратной изЪ 2хЪ, $\sqrt{3}$ корень квадратной изЪ 3хЪ; $\sqrt{\frac{2}{3}}$ корень квадратной изЪ $\frac{2}{3}$, вообще $\sqrt{a}$ показываетЪ корень квадратной изЪ a; и такЪ для означенїя корня квадратнаго изЪ числа не квадратнаго всегда употребляютЪ сей знакЪ $\sqrt{}$, которой пишутЪ попереди онаго.

131.

Вышепомянутое понятїе о сихЪ неизвлекомыхЪ числахЪ, ведетЪ насЪ на

путь, какимЪ образомЪ дѣлать употребительные сЪ оными выкладки. Понеже корень квадратной изЪ 2хЪ умноженной самЪ собою даетЪ 2, то и изЪ $\sqrt{2}$ умноженнаго на $\sqrt{2}$ несумнѣнно произойдетЪ 2; равнымЪ образомЪ $\sqrt{3}$ на $\sqrt{3}$ даетЪ 3, $\sqrt{5}$ умноженной на $\sqrt{5}$ даетЪ 5, также $\sqrt{\frac{2}{3}}$ на $\sqrt{\frac{2}{3}}$ даетЪ $\frac{2}{3}$, и вообще $\sqrt{a}$ умноженной на $\sqrt{a}$ даетЪ a.

132.

Но когда $\sqrt{a}$ умножится на $\sqrt{b}$, то произведеніе будетЪ $\sqrt{ab}$; понеже выше упомянуто, что когда квадратное число имѣетЪ множителей, то корень изЪ произведенія есть также корень изЪ обоихЪ множителей; и по сему квадратной корень изЪ произведенія ab получишь, т. е. $\sqrt{ab}$, когда квадратной корень изЪ a, т. е. $\sqrt{a}$ умножишь на квадратной корень изЪ b; т. е. $\sqrt{b}$: изЪ чего явствуетЪ, что ежели бы b равно было a, то бы $\sqrt{a}$ умноженной на $\sqrt{a}$ произвело $\sqrt{aa}$, а $\sqrt{aa}$ безсомнѣнія есть a, потому что aa есть квадратЪ изЪ a.

133.

133.

Равнымъ образомъ когда $\sqrt{a}$ должно будетъ раздѣлить на $\sqrt{b}$, то получится $\sqrt{\frac{a}{b}}$; при чемъ случится можетъ, что въ частномъ числѣ неизвлекомость пропадетъ; такъ напр. ежели $\sqrt{18}$ должно будетъ раздѣлить на $\sqrt{8}$, то получишь $\sqrt{\frac{18}{8}}$ но $\frac{18}{8}$ равны $\frac{9}{4}$ и корень квадратной изъ $\frac{9}{4}$, есть $\frac{3}{2}$

134.

Ежели число предъ которымъ коренной знакъ $\sqrt{}$ поставленъ есть квадратъ, то извлечь его можно обыкновеннымъ образомъ. Такъ $\sqrt{4}$ равенъ 2, $\sqrt{9}$ равенъ 3, $\sqrt{36}$ есть 6, $\sqrt{12\frac{1}{4}}$ есть $\sqrt{\frac{49}{4}}$ которой равенъ $\frac{7}{2}$ или $3\frac{1}{2}$, въ сихъ случаяхъ неизвлекомость только быть кажется; а въ самомъ дѣлѣ она пропадаетъ.

135.

Такія неизвлекомыя числа можно легко умножать на обыкновенныя какъ напр. 2ды $\sqrt{5}$ равенъ $2\sqrt{5}$; $\sqrt{2}$ умноженной на 3 даетъ $3\sqrt{2}$, но понеже 3

равны $\sqrt{9}$, то и $\sqrt{9}$ умноженной на $\sqrt{2}$ дастъ $\sqrt{18}$, такъ что $\sqrt{18}$ равенъ $3\sqrt{2}$. Также $2\sqrt{a}$ равенъ $\sqrt{4a}$, $3\sqrt{a}$ равенъ $\sqrt{9a}$ и вообще $b\sqrt{a}$ равенъ $\sqrt{bba}$, откуду видно, что когда стоящее подъ коренным знакомъ число содержитъ въ себѣ квадратъ, то корень изъ онаго попереди помянутаго знака поставить можно, какъ $b\sqrt{a}$, такимъ образомъ слѣдующія обращенія будутъ ясны на пр.

$\sqrt{8}$ или $\sqrt{2.4}$ равенъ $2\sqrt{2}$
$\sqrt{12}$ или $\sqrt{3.4}$ — — — $2\sqrt{3}$
$\sqrt{18}$ или $\sqrt{2.9}$ — — — $3\sqrt{2}$
$\sqrt{24}$ или $\sqrt{6.4}$ — — — $2\sqrt{6}$
$\sqrt{32}$ или $\sqrt{8.4}$ — — — $2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$
$\sqrt{75}$ или $\sqrt{3.25}$ — — — $5\sqrt{3}$.

136.

При дѣленіи то же самое наблюдается, ибо $\sqrt{a}$ раздѣленной на $\sqrt{b}$ даетъ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, т. е. $\sqrt{\frac{a}{b}}$, такъ

$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ равенъ $\sqrt{\frac{8}{2}}$, или $\sqrt{4}$ или 2
$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ равенъ $\sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$
$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\tfrac{4}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\tfrac{9}{3}} = \sqrt{3}$$

$\frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{144}{6}}$ или $\sqrt{24} = \sqrt{6.4}$ т. е. $2\sqrt{6}$.

137.

При сложенїи и вычитанїи, нѣтъ ничего особливаго примѣчанїя достойнаго, потому что числа соединяются только знаками $+$ и $-$; какъ напр. $\sqrt{2}$ сложенной съ $\sqrt{3}$ даетъ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, а изъ $\sqrt{5}$ вычтенной $\sqrt{3}$ дастъ $\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

138.

Наконецъ примѣчать должно, что для различїя сихъ такъ называемыхъ неизвлекомыхъ чиселъ, обыкновенные числа какъ цѣлые такъ и ломаные называются *извлекомыми* или (рацїональными) числами (numeri rationales.)

И такъ когда рѣчь о рацїональныхъ числахъ, то всегда подъ тѣмъ разумѣются цѣлыя и ломаные числа.

ГЛАВА XIII.

О произходящихъ изъ сегожъ источника не возможныхъ или мнимыхъ числахъ.

139.

Видѣли ужé мы, что квадраты какъ изъ положительныхъ такъ и отрицательныхъ, (прибыточныхъ или убыточныхъ) чиселъ, суть всегда положительные или съ знакомъ +; ибо −a умноженное на −a даетъ также +aa, какъ и +a умноженное на +a. Для сей причины въ прежней главѣ брали мы числа, изъ коихъ квадратной корень извлечь должно, за числа положительныя.

140.

И такъ ежели случится изъ отрицательнаго числа извлечь корень квадратной, то конечно должно быть тутъ великому сомнѣнію, потому что нѣтъ никакого такого числа, котораго бы квадратъ былъ отрицательное число; какъ

какЪ напр. когда похочешь имѣть квадратной корень числа -4, то сему числу должно быть такому, которое бы само собою помножено, произвело -4; слѣдовательно искомое число ни $+2$ ни -2 быть не можетЪ, ибо какЪ $+2$, такЪ и -2 помножены будучи сами собою вЪ произведенїи даютЪ $+4$, а не -4.

141.

Отсюду видно, что корень квадратной изЪ отрицательнаго числа, ни положительное ни отрицательное число быть не можетЪ; потому что всѣхЪ отрицательныхЪ чиселЪ квадраты суть положительные или сЪ знакомЪ $+$, слѣдовательно искомой корень совсѣмЪ особливаго роду быть долженЪ, ибо онаго ни кЪ положительнымЪ, ни кЪ отрицательнымЪ числамЪ причислить не можно.

142.

Понеже выше сего ужé упомянуто, что всѣ положительныя числа больше нежели о, напротивЪ того всѣ отрицательныя меньше нежели о; такЪ что все,

что больше нежели ничево положительными; а все что меньше ничево отрицательными числами изъявляется, и такъ видимъ мы, что корни изъ отрицательныхъ чиселъ ни больше ни меньше нежели ничево, и самое ничево они также не будутъ, ибо о умноженной на о въ произведеніи даетъ о, и слѣдовательно не отрицательное число.

143.

Когда всѣ возможныя числа, какія только представить можно, суть больше и меньше о или самой о; то изъ сего видно, что корни квадратные изъ отрицательныхъ чиселъ, въ число возможныхъ чиселъ включены быть не могутъ, слѣдовательно суть числа *не возможныя*. Сіе обстоятельство ведетъ насъ къ познанію такихъ чиселъ, которыя по ихъ свойству суть не возможныя и обыкновенно *мнимыми* числами называются, потому что ихъ въ умѣ только представить можно.

144.

144.

Чего ради всѣ сїи выраженїя, какъ $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$ и прочая показываютъ такїя не возможныя или мнимыя числа, ибо чрезъ то означаются корни квадратные изъ отрицательныхъ чиселъ.

И такъ по справедливости можно подтвердить о сихъ числахъ, что они ни больше ни меньше нуля, да и самаго нуля не составляютъ; по чему справедливо почтены быть могутъ за невозможныя.

145.

А поелику они только въ умѣ нашемъ представляются, то для того и называютъ ихъ мнимыми числами И хотя сїи числа какъ $\sqrt{-4}$ по свойству ихъ и совсѣмъ невозможныя, то однако имѣемъ мы объ нихъ довольное понятїе, зная что ими означается такое число, которое естьли само на себя помножено будетъ, въ произведенїи дастъ -4, и сего довольно для знанїя, какъ съ сими

числами

числами въ выкладкахъ поступать надлежитъ.

146.

И такъ что мы теперь о такихъ не возможныхъ числахъ, какъ $\sqrt{-3}$, знаемъ состоитъ въ томъ, что квадратъ изъ онаго; или произведеніе изъ $\sqrt{-3}$ на $\sqrt{-3}$, будетъ -3; также $\sqrt{-1}$ умноженной на $\sqrt{-1}$ дастъ -1; и вообще когда $\sqrt{-a}$ умножится на $\sqrt{-a}$, или возмется квадратъ $\sqrt{-a}$ выдетъ $-a$.

147.

Когда $-a$ есть то же, что и $+a$ умноженное на -1; а корень квадратной изъ произведенїя находится, когда квадратные корни изъ обоихъ множителей на себя помножатся, такъ будетъ корень изъ a умноженной на -1, или корень изъ $-a$ столько же какъ $\sqrt{a}$ умноженной на $\sqrt{-1}$. Но поелику $\sqrt{a}$ есть возможное число, слѣдовательно содержащееся въ немъ невозможное всегда привести можно въ $\sqrt{-1}$, и посему будетъ $\sqrt{-4}$; равенъ $\sqrt{4}$ умноженному на $\sqrt{-1}$;

а $\sqrt{4}$ есть 2, то $\sqrt{-4}$ равенъ будетъ $2\sqrt{-1}$; $\sqrt{-9}$ равенъ $\sqrt{9}.\sqrt{-1}$, то есть $3\sqrt{-1}$; $\sqrt{-16}$ равенъ $4\sqrt{-1}$,

148.

Когда $\sqrt{a}$ умноженной на $\sqrt{b}$ даетъ $\sqrt{ab}$; то $\sqrt{-2}$ умноженной на $\sqrt{-3}$ дастъ $\sqrt{6}$: рiвнымъ образомъ $\sqrt{-1}$ умноженной на $\sqrt{-4}$ дастъ $\sqrt{4}$, то есть 2; откуду видно, что два не возможные числа помноженные сами собою произвести могутъ возможное или дѣйствительное число. Но когда $\sqrt{-3}$ умноженъ будетъ на $\sqrt{+5}$, то получится $\sqrt{-15}$, или возможное число помноженное на не возможное, всегда не возможное производитъ.

149.

Подобнымъ образомъ и въ дѣленiи поступать надлежитъ; ибо когда $\sqrt{a}$ раздѣленной на $\sqrt{b}$ даетъ $\sqrt{\frac{a}{b}}$; то $\sqrt{-5}$ раздѣленной на $\sqrt{-1}$ дастъ $\sqrt{+5}$; $\sqrt{+3}$ раздѣленной на $\sqrt{-3}$ дастъ въ частномъ числѣ $\sqrt{-1}$; а 1 раздѣленная на $\sqrt{-1}$

дастъ

дастъ $\frac{1}{\sqrt{-1}}$, т. е. $\sqrt{-1}$, потому что 1 то же что и $\sqrt{+1}$.

150.

Когда справедливо вышепомянутое примѣчаніе, что каждаго числа квадратной корень имѣетъ двоякую силу, то есть: что оной какъ съ положительнымъ такъ и съ отрицательнымъ знакомъ взятъ быть можетъ, какъ напр. $\sqrt{4}$ есть какъ $+2$, такъ и -2, и вообще вмѣсто квадратнаго корня изъ a можно писать какъ $+\sqrt{a}$, такъ и $-\sqrt{a}$; то будетъ оно также имѣть мѣсто и при невозможныхъ числахъ, и корень квадратной изъ $-a$ будетъ, какъ $+\sqrt{-a}$ такъ и $-\sqrt{-a}$, при чемъ знаки $+$ и $-$, которые попереди знака $\sqrt{}$ становятся отличать должно отъ тѣхъ, кои стоятъ подъ знакомъ $\sqrt{}$.

151.

Наконецъ еще сомнѣніе разрѣшить надлежитъ, которое состоитъ въ томъ, когда такія числа суть невозможны, то кажется что они совсѣмъ не нужны, и

ученіе

ученіе сіе за самую малость почесть можно. Не смотря на сіе оно въ самомъ дѣлѣ весьма нужно, ибо очень часто случаются такія вопросы, о которыхъ скоро узнать не льзя возможные ли они или не возможные? а когда рѣшеніе ихъ приведетъ насъ на такія числа невозможныя, то сіе значить будетъ, что и самой вопросъ не возможенъ. Для изъясненія сего примѣромъ разсмотримъ слѣдующей вопросъ: данное число 12 раздѣлить на двѣ такія части, которыхъ бы произведеніе было 40? Сей вопросъ когда по предписаннымъ въ слѣдующихъ правиламъ рѣшить будемъ, то найдемъ для двухъ искомыхъ частей $6+\sqrt{-4}$, и $6-\sqrt{-4}$, которыя слѣдовательно суть не возможныя; и такъ изъ сего видно, что вопроса сего рѣшить не можно.

Естьли же бы должно было число 12 раздѣлить на такія двѣ части; которые бы въ произведеніи дали 35; то сіи части были бы безъ сомнѣнія 7 и 5.

глава

ГЛАВА XIV.

о кубичныхъ числахъ.

Когда какое нибудь число трижды само на себя, или его квадратъ еще на самое число помножится, то произведеніе называется *кубъ* или *кубичное число*; такъ числа́ а кубъ будетъ ааа, которое происходитъ отъ умноженія числа а на самаго себя, то есть на а, а квадратъ его аа еще на число а.

И такъ кубы натуральныхъ чиселъ суть слѣдующія:

Числа:	1,	2,	3,	4,	5,	6,
Кубы:	1,	8,	27,	64,	125,	216,

Числа:	7,	8,	9,	10,
Кубы:	343,	512,	729,	1000,

И такъ далѣе.

153.

Когда мы при сихъ кубичныхъ числахъ разсмотримъ ихъ разности, такъ какъ и при квадратныхъ числахъ учинено было, вычитая каждый изъ слѣдующаго, то

то получится слѣдующей рядъ чиселъ: 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271; между которыми не видно никакого порядка; естьли же мы еще сихъ чиселъ возмемъ разности, то получится слѣдующей рядъ 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, между которыми всѣми одна разность 6.

154.

Равнымъ образомъ находить безъ трудности можно кубы дробей; такъ напр. $\frac{1}{2}$ кубъ есть $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{3}$ кубъ будетъ $\frac{1}{27}$; $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{27}$. Надлежитъ только какъ числителя такъ и знаменателя взять кубы порознь; такъ дроби $\frac{3}{4}$ кубъ будетъ $\frac{27}{64}$.

155.

Чтобы найти кубъ смѣшеннаго числа, надлежитъ его сперва привесть въ одну дробь; а потóмъ щисленїе здѣлать будетъ не трудно. Такъ числá $1\frac{1}{2}$ кубъ легко найти можно; ибо $1\frac{1}{2}$ приведенные въ одну дробь равны $\frac{3}{2}$, а кубъ $\frac{3}{2}$ равенъ $\frac{27}{8}$, то есть 3 и $\frac{3}{8}$: равнымъ образомъ числá

$1\frac{1}{4}$ или $\frac{5}{4}$ кубъ есть $\frac{125}{64}$, то есть 1 и $\frac{61}{64}$; а числа $3\frac{1}{4}$ или $\frac{13}{4}$ кубъ $\frac{2197}{64}$, то есть $34\frac{21}{64}$.

156.

Понеже числа́ a кубъ aaa, то числа́ ab будетъ кубъ aaabbb, изъ чего видно, что когда число имѣетъ два или больше множителей, то кубъ онаго выдетъ, ежели кубы каждаго множителя помножатся между собою; такъ напр. понеже 12 равны 3.4, то помножь кубъ 3хъ которой есть 27, на кубъ 4хъ, которой есть 64, и получишь 1728 кубъ числа́ 12. Отсюда видно также, что кубъ 2a долженъ быть 8aaa, слѣдовательно въ 8 разъ больше куба изъ a; равнымъ образомъ кубъ 3a есть 27 aaa, т. е. въ 27 разъ больше нежели кубъ изъ a.

157.

Что касается до знаковъ + и —, то ясно само по себѣ, что числа положительнаго, какъ +a, кубъ будетъ также +aaa положительной, а числа отрицательнаго какъ —a будетъ и кубъ отрицательной; ибо возми сперва квадратъ —a;

кото-

которой есть $+aa$, и помножь его на $-a$, то получится искомой кубъ $-aaa$, числа $-a$, слѣдовательно съ кубами совсѣмъ противное бываетъ нежели съ квадратами, ибо сїи послѣднїе всегда бываютъ положительные; напротивъ того -1 кубъ есть -1; -2 хъ кубъ -8; -3 хъ кубъ -27, и такъ далѣе.

ГЛАВА XV.

О кубичныхъ корняхъ, и произходящихъ оттуда неизвлекомыхъ числахъ.

158.

Показавъ какимъ образомъ даннаго числа находить кубъ, можно обратно изъ даннаго числа находить такое число, которое бы 3жды само на себя помноженное произвело данное число; и сїе найденное число въ сравненїи съ даннымъ, называется его *кубичнымъ корнемъ.* Слѣдовательно даннаго числа кубичной корень есть такое число, котораго кубъ равенъ данному числу.

159.

И такъ когда данное число есть дѣйствительно такое кубичное число, какое мы въ прежней главѣ находили, то легко найти можно его кубичной корень. Какъ напр. кубичной корень изъ 1 есть 1, изъ 8, 2, изъ 27, 3, изъ 64хъ 4, и такъ далѣе.

Равнымъ образомъ изъ −27 кубичной корень есть −3, изъ −125, −5. Ежели данное число будетъ ломаное, какъ $\frac{8}{27}$, то кубичной его корень будетъ $\frac{2}{3}$, изъ $\frac{64}{343}$ есть $\frac{4}{7}$, сверьхъ сего когда данное число будетъ смѣшенное, какъ $2\frac{10}{27}$, которое приведено будучи въ одну дробь дѣлаетъ $\frac{64}{27}$, слѣдовательно кубичной его корень будетъ $\frac{4}{3}$, т. е. $1\frac{1}{3}$.

160.

Естьли же данное число будетъ не точной кубъ, то и корня его кубичнаго ни въ цѣлыхъ ни въ ломаныхъ числахъ изъявить не можно. Такъ напр. 43 поелику число не кубичное, то ни въ

цѣлыхъ

цѣлыхъ ни въ ломаныхъ числахъ не можно показать такого числá, котораго бы кубъ составлялъ точно 43. Между тѣмъ однако намъ извѣстно, что корень онаго числá больше 3хъ, а меньше 4хъ; потому что кубъ 3хъ дѣлаетъ только 27. т. е. меньше 43; а кубъ 4 есть 64 больше 43, слѣдовательно знаемъ мы, что искомому кубичному корню числа 43, содержаться должно между числами 3 и 4.

161.

Ежели бы мы захотѣли теперь къ 3мъ придать еще дробь, для того что кубичной корень 43хъ больше 3хъ, то можно бы къ правдѣ подойти ближе; а поелику кубъ такого числа всегда содержать будетъ въ себѣ дробь, того ради не можно ему быть никогда 43; положимъ напр. искомой кубичной корень $3\frac{1}{2}$ или $\frac{7}{2}$, то кубъ его $\frac{343}{8}$ или $42\frac{7}{8}$хъ, слѣдовательно $\frac{1}{8}$ меньше 43хъ.

162.

Отсюда видно, что корня кубичнаго изъ 43хъ ни въ цѣлыхъ ни въ ломаныхъ числахъ изъявить нельзя; а имѣя ясное понятїе о величинѣ его, употребляютъ для означенїя онаго знакъ $\sqrt[3]{}$, которой ставятъ предъ даннымъ числомъ и для различїя отъ корня квадратнаго выговариваютъ словомъ корень кубичной. Такъ напр. $\sqrt[3]{43}$ означаетъ корень кубичной изъ 43, т. е. такое число, котораго кубъ есть 43, или которое 3ды само собою помноженное 43 производитъ.

163.

Изъ сего видно, что такїя выраженїя не принадлежатъ къ извлекомымъ числамъ, но особливой родъ неизвлекомыхъ составляютъ. Съ квадратнымъ корнемъ не имѣютъ они никакого сообщенїя, да и не возможно такого кубичнаго корня никакимъ квадратнымъ, какъ $\sqrt{12}$, изобразить: ибо когда квадратъ $\sqrt{12}$ есть 12, то кубъ онаго будетъ

$12\sqrt{12}$; слѣдовательно еще неизвлекомое число и 43 составить не можетъ.

164.

А ежели данное число есть дѣйствительной кубъ, то и выраженія сіи будутъ извлекомыя, такъ $\sqrt[3]{1}$ равенъ 1; $\sqrt[3]{8}$ равенъ 2, а $\sqrt[3]{27}$ равенъ 3, и вообще $\sqrt[3]{aaa}$ равенъ a.

165.

Когда кубичной корень, какъ $\sqrt[3]{a}$, должно будетъ помножить на другой, какъ $\sqrt[3]{b}$, то произведеніе будетъ $\sqrt[3]{ab}$: понеже намъ извѣстно, что корень кубичной изъ произведенія ab выходитъ, изъ умноженія обоихъ кубичныхъ корней множителей. Равнымъ образомъ, когда $\sqrt[3]{a}$ должно будетъ раздѣлить на $\sqrt[3]{b}$, въ частномъ числѣ будетъ $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$.

166.

Отсюда легко понять можно, что $2\sqrt[3]{a}$ столькожь дѣлаетъ какъ и $\sqrt[3]{8a}$, потому что 2 столько же, какъ и $\sqrt[3]{8}$. Рав-

нымЪ образомЪ $3\sqrt[3]{a}$ равенЪ $\sqrt[3]{27a}$, и $b\sqrt[3]{a}$ равенЪ $\sqrt[3]{abbb}$. Такожде и обратно когда число подЪ знакомЪ стоящее имѢетЪ множителемЪ кубичное число, то корень кубичной онаго можно поставить попереди знака, такЪ напр. $\sqrt[3]{64a}$, тоже что и $4\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{125a}$, тоже что и $5\sqrt[3]{a}$, слѢдовательно $\sqrt[3]{16}$ тоже что $2\sqrt[3]{2}$ потому что 16 равны 8. 2.

167.

Когда данное число будетЪ отрицательное, то при кубичномЪ корнѢ нѢтЪ такихЪ затрудненій, какіе при квадратномЪ выше сего мы имѢли; потому что кубы отрицательныхЪ чиселЪ суть также отрицательные, и слѢдовательно кубичные корни чиселЪ отрицательныхЪ будутЪ также отрицательные, какЪ напр. $\sqrt[3]{-8} = -2$, $\sqrt[3]{-27} = -3$, также $\sqrt[3]{-12}$ равенЪ $-\sqrt[3]{12}$, и $\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$; изЪ чего видно, что знакЪ — какЪ позади, такЪ попереди кореннаго знака кубичнаго писать можно. И такЪ здѢсь не имѢемЪ мы невозможныхЪ, или мнимыхЪ

чиселЪ,

чиселЪ, какЪ то было при квадратныхЪ корняхЪ отрицательныхЪ чиселЪ.

ГЛАВА XVI.

о степеняхЪ вообще.

Когда какое число многажды само собою помножается, то происходящее оттуду произведенїе вообще *потенцїею* или *степенью* называется.

Понеже квадратЪ произходитЪ отЪ умноженїя какого нибудь числа самаго на себя однажды, а кубЪ отЪ умноженїя самагожЪ собою дважды: то какЪ квадраты, такЪ и кубы подЪ именемЪ потенцїй, т. е. степеней разумѣть должно.

169.

Сїи степени различаются по числу, сколько разЪ одно какое нибудь число само на себя помножается; такЪ напр. когда какое нибудь число однажды само собою помножится, то сїе произведенїе называется вторая степень, которая

 тоже

тоже значитъ что и квадратъ того числа ; а когда число дважды само собою помножится , то сїе произведенїе *третяя степень* называется , которая одинакое знаменованїе съ кубомъ имѣетъ; когда же число 3 ды само собой помножится : то произведенїе сїе 4 *тою степенью* такожде и *бикпадратомъ* называется. Отсюда разумѣется что будетъ 5тая , 6тая , и 7мая степень какого нибудь числа , которые вышшими степеньми именуются, а особливаго имени не имѣютъ.

170.

Зная , что 1цы всѣ степени =1 , потому что сколько бы разъ 1 саму собой ни помножали , въ произведенїи всегда выходитъ 1. Для изъясненїя вышеобъявленнаго поставимъ теперь по порядку всѣ степени чиселъ 2 и 3хъ , кокоторые слѣдующимъ образомъ идутъ.

степени.	числа 2хъ.	числа 3хъ
I.	2	3
II.	4	9
III.	8	27
IV.	16	81
V.	32	243
VI.	64	729
VII.	128	2187
VIII.	256	6561
VIIII.	512	19683
X.	1024	59049
XI.	2048	177147
XII.	4096	531441
XIII.	8192	1594323
XIV.	16384	4782969
XV.	32768	14348907
XVI.	65536	43046721
XVII.	131072	129140163
XVIII.	262144	387420489

Особливо примѣчанія достойны степени числа 10, какъ 10^{I}, 100^{II}, 1000^{III}, 10000^{IV} 100000^{V}, 1000000^{VI}, потому что на нихъ вся ариѳметика основана; при семъ примѣчать надлежитъ что только на верьху поставленныя числа, означаютъ до какой степени каждое число возвышено.

171.

Ежели мы о семъ вообще разсуждать станемъ, то степени числа a найдутся слѣдующіе, какъ: a aa^{II}, aaa^{III}, $aaaa^{IV}$, $aaaaa^{V}$, $aaaaaa^{VI}$, и такъ далѣе; но такимъ образомъ степени писать не способно; ибо когда бы вышшія степени изъявить потребно было, тобъ

тобЪ ту же самую букву многажды вЪ рядЪ писать надлежало, да и для читателя было бы такожде скучно щитать множество такихЪ буквЪ, дабы узнать, какая чрезЪ то степень означается, такЪ напр. сотую степень симЪ образомЪ изЪявить весьма бы трудно было, а еще трудняе узнать оную.

172.

Для избѢжанія такихЪ неспособностей вЪ изЪявленіе степеней найденЪ удобнѢйшій способЪ, которой для великой своей пользы достоинЪ истолкованія, а имянно: надЪ тѢмЪ числомЪ, которое напр. сотую степень показывать должно, пишутЪ нѢсколько вкось кЪ правой рукѢ число 100: такЪ напр. a^{100} и выговаривается: *a* возвышенное до 100, чрезЪ что сотая степень *a* разумѢется, и вЪ верьху написанное число какЪ вЪ нашемЪ примѢрѢ 100, *показателемЪ степени* называютЪ, которыя имена примѢчать надлежитЪ.

173.

И такЪ a^2, или a возвышенное до 2хЪ показываетЪ вторую степень числа a, и пишется иногда мѣсто aa, для того что оба способа писать и разумѣть легко можно. НапротивЪ того мѣсто куба или третьей степени aaa обыкновенно пишутЪ a^3, для того чтобЪ больше мѣста осталось; равнымЪ образомЪ a^4 показываетЪ четвертую степень, a^5 пятую, a^6 шестую и проч.

174.

По сему способу всѣ степени буквы a слѣдующимЪ образомЪ представятся: какЪ a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9 и пр. откуда видно, что симЪ способомЪ мѣсто a удобно можно бы писать a^1, дабы порядокЪ тѣмЪ ясняе представить, понеже a не инное что есть какЪ a, и единица показываетЪ что букву a однажды написать должно: такой порядокЪ обыкновенно называютЪ *прогрессиею Геометрическою*, ибо каждой вЪ ней послѣ-

дующей

дующей членъ, равно превозходитъ свой предъидущей.

175.

Въ семъ ряду каждой членъ найдется, когда его предъидущей на a помножится, чрезъ что показатель единницею увеличится: такъ изъ каждаго члена найдется его предъидущей, когда онъ раздѣлится на a, чрезъ что указатель уменьшится единницею. Отсюда видимъ мы, что предъ a^1 стоящей членъ долженъ быть $\frac{a}{a}$ т. е. 1, а съ показателемъ a^0; изъ чего сїе свойство чиселъ слѣдуетъ, что a^0 всегда должно быть 1, какъ бы число a велико или мало ни было, да хотя бы a и 0 равно было, потому что 0^0 безъ сомнѣнїя дѣлаетъ 1.

176.

Сей рядъ степеней можно назадъ продолжать двоякимъ образомъ; первое раздѣляя каждой членъ на a, второе уменьшая указателя единицею, или 1 изъ

него

него вычитая. Намъ заподлинно извѣстно, что въ обоихъ сихъ случаяхъ члены совершенно равны между собою будутъ; и такъ сей вышепомянутый рядъ посему двоякому образу представимъ

$$\frac{1}{aaaaaa},\ \frac{1}{aaaaa},\ \frac{1}{aaaa},\ \frac{1}{aaa},\ \frac{1}{aa},\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{1},\ a$$

первой $\frac{1}{a^6},\ \frac{1}{a^5},\ \frac{1}{a^4},\ \frac{1}{a^3},\ \frac{1}{a^2},\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{a^0},\ a$

второй $a^{-6},\ a^{-5},\ a^{-4},\ a^{-3},\ a^{-2},\ a^{-1},\ a^{-0};\ a$

Что надлежитъ читать назадъ отъ правой руки къ лѣвой.

177.

Чрезъ сіе доходимъ мы къ познанію такихъ степеней, которыхъ показатели числа отрицательные; и можемъ опредѣлить точную ихъ величину: такъ прежденайденное представится слѣдующимъ образомъ, въ первыхъ $a^{\circ} = 1$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ и такъ далѣе.

178.

Изъ сего явствуетъ, какимъ образомъ находить должно степени произведенія

веденія ab; оныя суть слѣдующіе: ab или a^1b^1, a^2b^2, a^3b^3, a^4b^4, a^5b^5, a^6b^6, и проч. равнымъ образомъ находятся степени и дробей; напр. $\frac{a}{b}$ суть слѣдующіе $\frac{a^1}{b^1}$, $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^3}{b^3}$, $\frac{a^4}{b^4}$, $\frac{a^5}{b^5}$, $\frac{a^6}{b^6}$, и протчая.

179.

Напослѣдокъ надлежитъ здѣсь разсмотрѣть, также степени отрицательныхъ чиселъ. Положимъ данное отрицательное число $-a$, то степени онаго будутъ $-a$, $+aa$, $-a^3$, $+a^4$, $-a^5$, $+a^6$, $-a^7$, $+a^8$, и пр. откуда явствуетъ, что тѣ только степени будутъ отрицательные, которыхъ показатели суть числа нечетныя; напротивъ того всѣ тѣ степени будутъ положительные, которыхъ показатели суть четныя числа. Такъ степени 3я, 5я, 7я, имѣютъ знакъ $-$; а 2я, 4я, ая, 8я, имѣютъ знакъ $+$.

ГЛАВА

ГЛАВА XVII.

О счисленіяхъ со степенями.

180.

Въ разсужденіи сложенія и вычитанія нѣтъ здѣсь ничего примѣчанія достойнаго, потому что разные степени связываются только знаками $+$ и $-$, такъ напр. a^3+a^2, есть сумма 3 тей и 2 рой степени буквы a, a^5-a^4 есть остатокъ четвертой степени вычтенной изъ 5 той, чего короче представить нельзя. А ежели случатся одинакіе степени, то вмѣсто a^3+a^3 пишутъ $2a^3$ и такъ далѣе.

181.

Но при умноженіи такихъ степеней примѣчать надлежитъ вопервыхъ, когда каждую степень буквы a помножить должно самымъ a, то произойдетъ такая степень, у которой показатель единицею больше, такъ наприм. a^2 умноженной на a даетъ a^3, а a^3 умноженной на a даетъ a^4 и протч. тожъ бываетъ и

съ тѣми степенями, которыхъ показатели отрицательные, ежели оные помножатся на a, то къ показателю придается единица. Такъ a^{-1} умноженное на a даетъ a^0, то есть 1цу, что изъ сего явствуетъ: понеже a^{-1} равно $\frac{1}{a}$; а $\frac{1}{a}$ умноженная на a даетъ $\frac{a}{a}$; т. е. 1цу; тоже самое бываетъ и съ a^{-2}, ежели оное помножишь на a, то произойдетъ a^{-1}, то есть $\frac{1}{a}$, и a^{-10} умноженное на a даетъ a^{-9} и такъ далѣе.

182.

Но ежели степень умножишь на aa, или на вторую степень, то показатель будетъ 2мя больше; такъ a^2 умноженной на a^2 даетъ a^4; a^3 умноженной на a^2 даетъ a^5; a^4 помноженное на a^2 даетъ a^6 и вообще a^n умноженное на a^2 даетъ a^{n+2}. Сіе же самое бываетъ и съ отрицательными показателями, какъ то a^{-1} умноженное на a^2 даетъ a^1, т. е. a, по тому что a^{-1} есть $\frac{1}{a}$, которое когда на aa помножится даетъ $\frac{aa}{a}$, т. е. a, также a^{-2} умноженное на a^2 даетъ a^0, т. е. 1цу, a^{-3} умноженное на a^2 даетъ a^{-1}.

183.

183.

То же самое бываетъ, когда каждую степень умножишь на 3 ю степень буквы a, или на a^3, тогда показатель оныхъ увеличится тремя; такъ a^n умноженное на a^3 даетъ a^{n+3}, и вообще ежели двѣ степени буквы a помножатся между собою, то произведенїе будетъ степень буквы a, которыя показатель есть сумма оныхъ показателей; такъ a^4 умноженное на a^5 даетъ a^9, а a^{12} умноженное на a^7 даетъ a^{19} и такъ далѣе.

184.

По сему основанїю легко можно находить вышшїя степени опредѣленныхъ чиселъ; такъ напр. когда пожелаешь знать 24тую степень числа 2хъ, то получишь оную, ежели 12тую степень умножишь 12тою; ибо 2^{24} не иное что есть, какъ 2^{12} умноженное на 2^{12}, а 2^{12} какъ мы выше сего видѣли, есть 4096, то умножь 4096 на 4096, въ произведенїи будетъ 16777216 искомая степень, т. е. 2^{24}.

185.

При дѣленіи слѣдующее примѣчать должно, ежели степень литеры a раздѣлить должно на a, то показатель оныя 1цею уменьшается, или надлежитъ отъ онаго отнять 1цу; такъ напр. a^5 раздѣленное на a даетъ a^4; a^0 т. е. 1 раздѣленная на a даетъ a^{-1} или $\frac{1}{a}$; a^{-3} раздѣленное на a даетъ a^{-4}.

186.

Ежели же степень литеры a раздѣлить должно будетъ на a^2, то отъ показателя оной степени надлежитъ отнять 2; а когда пожелаешь оную раздѣлить на a^3, то должно отъ показателя оной отнять 3; и вообще какую бы степень литеры a на другую раздѣлить ни надлежало, то всегда отъ показателя первой степени, отнимать надлежитъ показателя второй степени; такъ напр. a^{15} раздѣленное на a^7 даетъ a^8; a^6 раздѣленное на a^7 даетъ a^{-1}, также и a^{-3} раздѣленное на a^4 даетъ a^{-7}.

187.

Изъ сего легко понять можно, какимъ образомъ степень степеней находить; потому что дѣлается сїе чрезъ умноженїе; такъ на прим. ежели похочешь найти 2ю степень или квадратъ буквы a^3, то будетъ оная a^6; а 3я степень или кубъ буквы a^4 будетъ a^{12}; откуда явствуетъ, что для сысканїя квадрата какой либо степени, надлежитъ только ея показателя удвоить; такъ на прим. изъ a^n квадратъ есть a^{2n}; а кубъ или 3я степень буквы a^n будетъ a^{3n}, такимъ же образомъ и 7мая степень буквы a^n будетъ a^{7n} и такъ далѣе.

188.

Понеже квадратъ изъ a^2 есть a^4, то есть: четвертая степень числа a, которая будетъ квадратъ квадрата; откуда явствуетъ для чего 4ю степень *биквадратомъ* или *квадратоквадратомъ* называютъ.

Понеже квадратъ изъ a^3 есть a^6, то обыкновено называютъ 6тую степень *квадратокубомъ*.

Наконецъ когда кубъ изъ a^3 есть a^9 то есть: 9 я степень буквы a; чего ради оную именуютъ *кубокубомъ*, другихъ же имянъ нынѣ больше нѣтъ въ употребленіи.

ГЛАВА XVIII.

о корняхъ всѣхъ степеней.

189.

Понеже даннаго числа корень квадратной есть такое число, котораго квадратъ равенъ данному числу; а корень кубичной есть такое число, котораго кубъ равенъ тому же данному числу, то и каждаго даннаго числа такой корень найти можно, котораго 4 я или 5 я или какая нибудь по изволенію взятая степень равна будетъ данному числу; для различія сихъ разныхъ родовъ корней между собою, назовемъ квадратной корень вторымъ, а кубичной третьимъ корнемъ; тѣ же корни, которыхъ 4 я сте-

степень равна данному числу назовемЪ 4тыми, а тѢ коихЪ 5тая степень равна данному же числу пятыми корнями именовать будемЪ и такЪ далѢе.

190.

Когда второй или квадратной корень знакомЪ $\sqrt{}$, а третей или кубичной чрезЪ $\sqrt[3]{}$ означаются, то равнымЪ образомЪ 4той корень знакомЪ $\sqrt[4]{}$ а пятой чрезЪ $\sqrt[5]{}$ и такЪ далѢе изЪявляются; откуда явствуетЪ, что знакЪ квадратнаго корня по сему способу изображать надлежало бы такЪ $\sqrt[2]{}$, но понеже квадратные корни всѢхЪ чаще случаются, то для краткости число 2 надЪ кореннымЪ знакомЪ не ставится. И по сему когда надЪ кореннымЪ знакомЪ никакого числа не находится, то должно чрезЪ то всегда разумѢть квадратной корень.

191.

Дабы сїе представить вразумительнѢе, то хотимЪ мы изобразить разные корни числа a и покажемЪ ихЪ знаменованїя:

$\sqrt{a}$ есть второй корень числа a, котораго 2я степень равна сам. a
$\sqrt[3]{a}$ --- третей ——— ——— a ——— 3ья ——— ——— ——— ———
$\sqrt[4]{a}$ --- четвер. ——— ——— a ——— 4ая ——— ——— ———
$\sqrt[5]{a}$ --- пятой ——— ——— a ——— 5ая ——— ——— ———
$\sqrt[6]{a}$ --- шестой ——— ——— a ——— 6ая ——— ——— ———

192.

Сколь бы велико или мало число a ни было, то легко понять можно, какимъ образомъ надлежитъ разумѣть всѣ корни изъ разныхъ сихъ степеней.

При чемъ должно примѣчать, что ежели вмѣсто a возмется 1ца, то всѣ сіи корни равны будутъ 1цѣ, потому что всѣ степени изъ 1цы, равны всегда 1цѣ.

Но когда число a будетъ больше 1цы, то и корни всѣ будутъ больше 1цы. Естьли же сіе число меньше 1цы, то и корни всѣ меньше 1цы.

193.

Когда число a будетъ положительное, то легко разумѣть можно изъ того, что выше о квадратныхъ и кубичныхъ корняхъ сказано; т. е. что всѣ прочіе корни завсегда дѣйствительно из-

явлены

явлены быть могутъ и слѣдовательно дѣйствительныя и возможныя суть числа.

буде же число *a* отрицательное, то второй, четвертой, шестой и вообще всѣ четные корни будутъ числа невозможныя; по тому что всѣ четныя степени, какъ положительныхъ такъ и отрицательныхъ числъ, имѣютъ всегда знакъ $+$.

Напротивъ того 3ей, 5той, 7мой и вообще всѣ нечетныя корни будутъ отрицательные, для того что нечетные степени отрицательныхъ числъ, суть такожде отрицательные.

194.

И такъ отсюда получаемъ мы безконечное множество новыхъ родовъ неизвлекомыхъ или глухихъ числъ; ибо какъ скоро число *a* не будетъ дѣйствительная такая степень, которую показываетъ корень, то и не возможно сихъ корней изъявить ни въ цѣлыхъ ниже въ ломаныхъ числахъ; слѣдовательно надлежатъ оные до рода числъ, кои неизвлекомыми именуются.

ГЛАВА XIX.

О изъявленіи неизвлекомыхъ чиселъ, въ ломаныхъ показателяхъ.

195.

Въ послѣдней главѣ о степеняхъ показали мы, что квадратъ каждой степени найдется, когда ея показателя удвоишь, и что вообще квадратъ или вторая степень числа a^n будетъ a^{2n}; по чему изъ степени a^{2n} квадратной корень есть a^n, и слѣдовательно оной найдется, когда показателя степени возмешь половину или оной раздѣлишь на 2.

196.

И такъ изъ a^2 корень квадратной есть a^1; изъ a^4 квадратной корень a^2, изъ a^6 квадратное коренное число есть a^3 и такъ далѣе.

Когда теперь сіе вообще справедливо, то явствуетъ, что корень квадратной числа a^3 найдется $a^{\frac{3}{2}}$, подобнымъ образомъ изъ a^5 будетъ квадратной корень

рень $a^{\frac{5}{2}}$; слѣдовательно самаго числа a или a^1 будетъ квадратное коренное число $a^{\frac{1}{2}}$, откуда видно, что $a^{\frac{1}{2}}$ то же самое есть, что и $\sqrt{a}$ и сей новой способъ изъявлять квадратные корни надлежитъ примѣчать.

197.

Мы показали также, что кубъ какой нибудь степени a^n найдется, ежели ея показатель умножится на 3, и по сему кубъ ея будетъ a^{3n}.

Когда теперь на изворотъ изъ данной степени a^{3n} третей или кубичной корень найти должно, то будетъ оной a^n. или показателя степени надлежитъ только раздѣлить на 3, такъ изъ a^3 будетъ кубичной корень a^1 или a, изъ a^6 будетъ оной a^2, изъ a^9 получится a^3 и такъ далѣе.

198.

Сїе и въ томъ случаѣ справедливо, когда показатель раздѣлиться на 3 не можетъ; и по сему изъ a^2 будетъ корень

рень кубичной $a^{\frac{2}{3}}$, изъ a^4 получится оной $a^{\frac{4}{3}}$ или $a^{1\frac{1}{3}}$; слѣдовательно и самаго числа a или a^1 третей или кубичной корень будетъ $a^{\frac{1}{3}}$, откуда явствуетъ, что $a^{\frac{1}{3}}$ то же что и $\sqrt[3]{a}$.

199.

Подобнымъ образомъ то же бываетъ и съ вышшими корнями; четвертой корень изъ a будетъ $a^{\frac{1}{4}}$, что съ $\sqrt[4]{a}$ одно значитъ; равнымъ образомъ пятой корень изъ a будетъ $a^{\frac{1}{5}}$, которой то же значитъ, что и $\sqrt[5]{a}$ и сїе о всѣхъ вышшихъ корняхъ разумѣть должно.

200.

Такимъ образомъ можно бы было совсѣмъ обойтись безъ кореннаго знака, которой уже давно отъ всѣхъ принятъ; а вмѣсто бы онаго употреблять изтолкованные здѣсь ломаные показатели; но когда уже разъ принятъ въ обыкновенїе одинъ знакъ и оной во всѣхъ сочиненї-

яхъ

яхъ попадается, то и не нужно его совсѣмъ отбрасывать: однакожъ сей новый способъ, какъ наилутчїй къ изъясненїю самаго дѣла въ нынѣшнїя времена весьма часто употребляется; ибо что $a^{\frac{1}{2}}$ есть дѣйствительной квадратной корень изъ a, легко видѣть можно, когда возмется квадратъ онаго, что учинится ежели $a^{\frac{1}{2}}$ на $a^{\frac{1}{2}}$ помножится, и тогда выдетъ a^1 или a.

201.

Отсюда також де явствуетъ, какимъ образомъ протчїе ломаные показатели разумѣть должно, такъ когда будетъ $a^{\frac{4}{3}}$, то должно сперва взять четвертую степень числа a и изъ сей извлечь третей, или кубичной корень; такъ что $a^{\frac{4}{3}}$ столько же по просту значитъ, что и $\sqrt[3]{a^4}$. равнымъ образомъ $a^{\frac{3}{4}}$ найдется, когда сперьва возмется кубъ, или 3я степень числа a, которая есть a^3 и изъ сей 4той корень извлечется, такъ что $a^{\frac{3}{4}}$, то же что и $\sqrt[4]{a^3}$; подобнымъ обра-

образомъ $a^{\frac{4}{5}}$, то же самое есть, что и $\sqrt[5]{a^4}$ и такъ далѣе.

202.

Когда дробь изъявляющая показателя будетъ больше 1цы, то можно знаменованіе опредѣлить слѣдующимъ образомъ: пусть дано будетъ $a^{\frac{5}{2}}$, то сіе тоже что и $a^{2\frac{1}{2}}$, которое выдетъ когда a^2 на $a^{\frac{1}{2}}$ помножится; но $a^{\frac{1}{2}}$, тоже что и $\sqrt{a}$, и такъ $a^{\frac{5}{2}}$ будетъ, тоже что и $a^2\sqrt{a}$. Равнымъ образомъ $a^{\frac{10}{3}}$ или $a^{3\frac{1}{3}}$ тоже что и $a^3\sqrt[3]{a}$, и $a^{\frac{15}{4}}$ или $a^{3\frac{3}{4}}$, столько же значитъ какъ и $a^3\sqrt[4]{a^3}$. изъ всѣхъ сихъ довольно явствуетъ знатное употребленіе ломаныхъ показателей.

203.

Оно имѣетъ также и въ дробяхъ свою пользу, такъ ежели дано будетъ $\frac{1}{\sqrt{a}}$, то сіе тоже значитъ, что и $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$; но мы прежде видѣли, что дробь $\frac{1}{a^n}$ можно

но изъявить чрезъ a^{1-n}, слѣдовательно $\frac{1}{\sqrt{a}}$ можно изсбразить чрезъ $a^{-\frac{1}{2}}$, такимъ же образомъ $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ будетъ $a^{-\frac{1}{3}}$ и $\frac{a^2}{\sqrt[4]{a^3}}$ перемѣняется въ $\frac{a^2}{a^{\frac{3}{4}}}$ откуда выходитъ a^2 умноженной на $a^{-\frac{3}{4}}$, что перемѣняется въ $a^{\frac{5}{4}}$ т. е. въ $a^{1\frac{1}{4}}$, а сїе наконецъ будетъ $a\sqrt[4]{a}$; такїя превращенїя облегчаются самимъ упражненїемъ.

204.

Наконецъ еще примѣчать надлежитъ что каждой такой корень многими способами изъявленъ быть можетъ. Ибо когда $\sqrt{a}$ то же что и $a^{\frac{1}{2}}$, а $\frac{1}{2}$ во всѣ слѣдующїе дроби премѣниться можетъ, яко $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{12}$ и протч. то явствуетъ, что $\sqrt{a}$ столь же великъ какъ $\sqrt[4]{a^2}$, или какъ $\sqrt[6]{a^3}$ или какъ $\sqrt[8]{a^4}$ и такъ далѣе, равнымъ образомъ $\sqrt[3]{a}$, тоже что $a^{\frac{1}{3}}$, а $a^{\frac{1}{3}}$ тоже что $\sqrt[6]{a^2}$ или $\sqrt[9]{a^3}$ или $\sqrt[12]{a^4}$, откуда легко видѣть можно, что искомое число a

или

или a^1 въ слѣдующихъ коренныхъ знакахъ изобразиться можетъ, какъ $\sqrt[2]{a^2}$ или $\sqrt[3]{a^3}$ или $\sqrt[4]{a^4}$ или $\sqrt[5]{a^5}$ и протч.

205.

Сіе весьма много способствуетъ въ умноженіи и дѣленіи, какъ наприм. надлежитъ помножить $\sqrt[2]{a}$ на $\sqrt[3]{a}$, то вмѣсто $\sqrt[2]{a}$ пишется $\sqrt[6]{a^3}$, а вмѣсто $\sqrt[3]{a}$ ставится $\sqrt[6]{a^2}$, таким образомъ будутъ одинакіе коренные знаки, и по сему получится въ произведеніи $\sqrt[6]{a^5}$; что также и отсюда видѣть можно: понеже $a^{\frac{1}{2}}$ на $a^{\frac{1}{3}}$ помноженные даютъ $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$, но $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ равны $\frac{5}{6}$ и слѣдовательно произведеніе $a^{\frac{5}{6}}$ или $\sqrt[6]{a^5}$ естьли же бы $\sqrt[2]{a}$ или $a^{\frac{1}{2}}$, раздѣлить должно было на $\sqrt[3]{a}$ или на $a^{\frac{1}{3}}$, то получили бы $a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$ или $a^{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}}$ т. е. $a^{\frac{1}{6}}$ слѣдовательно $\sqrt[6]{a}$.

ГЛАВА

ГЛАВА XX.

О разныхъ счисленія способахъ и о ихъ связи вообще.

206.

До сихъ мѣстъ предлагали мы разные счисленія способы, какъ то сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе, такожде возвышеніе степеней, и наконецъ извлеченіе корней; но къ немалому изъясненію служить будетъ, когда мы происхожденіе сихъ счисленія способовъ, и ихъ связь между собою изъяснимъ, дабы познать можно было, будутъ ли еще другіе такіе способы возможны или нѣтъ. На такой конецъ станемъ мы употреблять новой знакъ, которой на мѣсто случающихся часто словъ, *то же*, *что*, *и* ставить можно; сей знакъ есть (=) и выговаривается словомъ равенство; такъ когда написано будетъ $a=b$, то значитъ сіе, что a стольже велико какъ и b, или a равно b. Такъ наприм. $3.5=15$.

207.

Первой счисленія способъ, которой разуму нашему представляется, есть безспорно *сложеніе*. т. е. когда два числа вмѣстѣ сложить, или оныхъ сумму найти должно будетъ; пусть будутъ два данныя числа a и b, и ихъ сумму изъявимъ буквою c, то будетъ $a+b=c$ и такъ сложеніе учитъ, когда оба числа a и b извѣстны, какимъ образомъ найти изъ оныхъ число c.

208.

Удержавъ сіе уравненіе, обороти вопросъ и спрашивай, когда числа a и c извѣстны, то какъ сыскать число b.

Здѣсь спрашивается, какое бы число къ числу a придать надлежало, чтобъ вышло оттуда число c. Пусть будетъ наприм. $a=3$, а $c=8$, такъ что $3+b=8$ быть должно, то видно, что b найдется, когда 3 изъ 8 вычтутся. И такъ вообще чтобы найти b, должно a вычесть изъ c, и выдетъ $b=c-a$,

а

а ежели къ сему придастся a, то получится $c-a+a=c$, и въ семъ то состоитъ произхожденіе вычитанія.

209.

И такъ произходитъ вычитаніе, когда вопросъ случающійся при сложеніи обратно выговоренъ будетъ; а понеже статься можетъ, что число, которое вычитать должно, будетъ больше того, изъ коего вычитать надлежитъ; такъ наприм. когда 9 изъ 5 вычесть надобно будетъ, то получаемъ мы отсюда понятіе о новомъ родѣ чиселъ, кои *отрицательными* или *убыточными* именуются; ибо $5-9=-4$.

210.

Ежели много чиселъ, кои въ одну сумму сложить должно будетъ, равны между собою, то находится ихъ сумма помощію умноженія, и называется оная въ такомъ случаѣ *произведеніемъ*. Такъ ab означаетъ произведеніе, которое выходитъ, когда одно число a на другое

b помножится; назовемъ теперь сіе произведеніе буквою c, и будетъ $ab=c$; слѣд. умноженіе учитъ, какимъ способомъ изъ данныхъ чиселъ a и b найти надлежитъ c.

211.

Предложимъ теперь такой вопросъ: когда числа c и a извѣстны, то какъ найти изъ нихъ число b? пусть будетъ наприм. $a=3$ и $c=15$, такъ что $3b=15$, слѣд. спрашивается теперь, какимъ бы числомъ надлежало помножить 3, чтобъ вышло 15; сіе учинится помощію дѣленія, и вообще, число b найдется, когда c на a раздѣлится, откуда выходитъ слѣдующее уравненіе $b=\frac{c}{a}$.

212.

А понеже часто случается, что число c на число a дѣйствительно раздѣлиться не можетъ, хотя буква b и опредѣленное знаменованіе имѣетъ; сіе ведетъ насъ къ новому роду чиселъ, кои *дробями* называются; такъ когда возмемъ $a=4$ и $c=3$, такъ что $4b=3$,

то видно , что b не можетъ быть цѣлое число, слѣдовательно оно есть дробь; а имянно $b = \frac{3}{4}$.

113.

Понеже умноженїе раждается изъ сложенїя, ежели много одинакихъ чиселъ складываемъ вмѣстѣ , то возмемъ теперь также и въ умноженїи , что многїя одинакїя числа , надлежитъ помножить одно на другое , чрезъ что придемъ мы ко степенямъ, которые вообще изъявляются въ сей формѣ a^b; сїе значитъ, что число a столько разъ само собою помножить должно , сколь велико число b. Здѣсь, какъ выше упомянуто a корень, b показатель , а a^b степень называются.

214.

Изъявимъ сїю степень буквою c, то будетъ $a^b = c$, гдѣ 3 буквы a, b и c попадаются. Въ наукѣ о степеняхъ показывается , что когда корень a и показатель b извѣстны , какимъ образомъ оттуда самую степень , т. е. букву c

опредѣлить должно. Пусть будетъ наприм. $a = 5$ и $b = 3$ такъ что $c = 5^3$; отсюда видно, что 5 три здѣсь 3 тью степень взять надлежитъ, которая есть 125, слѣдовательно $c = 125$. Итакъ здѣсь показывается способъ, какъ изъ корня a и показателя b степень c находить должно.

215.

Разсмотримъ теперь, не можно ли обратить или перемѣнить сей вопросъ такъ, чтобъ изъ 2хъ сихъ трехъ чиселъ a, b, c найти третіе. Сіе учиниться можетъ двоякимъ образомъ, потому что съ числомъ c можно взять или a, или b за извѣстныя, при чемъ примѣчать должно, что въ обоихъ прежнихъ случаяхъ, въ сложеніи и умноженіи одна только перемѣна имѣетъ мѣсто; ибо въ первомъ случаѣ $a + b = c$; все равно, будетъ ли при c или a или b извѣстно, и все равно написано ли будетъ $a + b$ или $b + a$; равнымъ образомъ и въ уравненіи $ab = c$ или $ba = c$, гдѣ буквы a и b также переставить можно; напротивъ того въ сте

пеняхъ

пеняхЪ сего быть не можетЪ, по тому что вмѣсто a^b ни коимЪ образомЪ не льзя поставить b^a, какЪ изЪ нѣкоторыхЪ примѣровЪ легко видѣть можно; ибо когда положится $a=5$, и $b=3$, то будетЪ $a^b=5^3=125$; напротивЪ того $b^a=3^5=243$, которые отЪ 125 весьма далеко разнятся.

216.

Отсюда видно, что здѣсь дѣйствительно два вопроса быть могутЪ, изЪ коихЪ 1вой есть, ежели со степенью c показатель b данЪ будетЪ, то какимЪ образомЪ найти должно корень a; а другой вопросЪ, когда степень c и корень a извѣстны, то какЪ сыскать показателя b.

217.

Первой изЪ сихЪ двухЪ вопросовЪ разрѣшенЪ уже прежде, вЪ наукѣ о извлеченіи корней: такЪ когда наприм $b=2$ и $a^2=c$, то должно быть a такое число, котораго квадратЪ равенЪ c, слѣдовательно $a=\sqrt{c}$. ПодобнымЪ образомЪ когда $b=3$ будетЪ $a^3=c$ т. е. кубЪ изЪ a равенЪ

данному числу c, и такъ получится $a = \sqrt[3]{c}$. Отсюда вообще разумѣть можно, какимъ образомъ изъ двухъ буквъ c и b сыскать букву a, а имянно будетъ $a = \sqrt[b]{c}$.

218.

Какъ скоро случится, что данное число c не будетъ дѣйствительная такая степень, которыя требуется корень, то выше сего уже примѣчено, что желаемаго корня a ни въ цѣлыхъ ни въ ломаныхъ числахъ изъявить не возможно, хотя онъ и долженъ имѣть опредѣленное свое знаменованіе; чрезъ что приходимъ мы къ новому роду чиселъ, кои *неизтлекомыми* или *глухими числами* именуются, изъ которыхъ по различію корней безконечное множество родовъ быть можетъ.

Сіе разсужденіе ведетъ насъ такожде къ совсѣмъ особливому роду чиселъ, кои *невозможными* или *мнимыми числами* называются.

219.

Осталось намЪ теперь разсмотрѣть еще одинЪ вопросЪ, а имянно: когда сверьхЪ степени c, еще корень a извѣстенЪ будетЪ, то какимЪ образомЪ найти оттуда показателя. Сей вопросЪ ведетЪ насЪ кЪ важной наукѣ о логарифмахЪ, коихЪ польза во всей Маѳематикѣ столь велика, что ни одного большаго вычисленія безЪ помощи логарифмовЪ совершить не возможно. Сію науку изЪяснимЪ мы вЪ слѣдующей главѣ, гдѣ придемЪ кЪ совсѣмЪ новому роду чиселЪ, кои и кЪ прежнимЪ неизвлекомымЪ причтены быть не могутЪ.

ГЛАВА XXI.

О логарифмахЪ вообще.

220.

Разсматривая уравненіе $a^b = c$ вопервыхЪ примѣчаемЪ мы, что вЪ наукѣ о логарифмахЪ вмѣсто корня a, по изволенію

нѣкоторое число взять можно, такъ чтобы оное всегда тоже знаменованїе имѣло. Ежели теперь показатель b возмется такъ, что степень a^b равна будетъ данному числу c, то показатель b логарифмъ числа c называется. Для означенія логарифма употребляется знакъ латинская буква l, которая поперeди числа c ставится, такъ пишутъ $b = lc$ чрезъ что означается, что b равно лагарифму числа c, или логарифмъ числа c есть b.

221.

И такъ когда корень a разъ взятъ за постоянной, то логарифмъ каждаго числа c не иное что есть, какъ показатель той степени изъ a, которая числу c равна. Когда теперь $c = a^b$, будетъ b логарифмъ степени a^b, и ежели возмется $b = 1$, то 1 будетъ логарифмъ числа a^1 т. е $la = 1$; когда же $b = 2$, то 2 логарифмъ числа a^2 т е. $la^2 = 2$, равнымъ образомъ $la^3 = 3$, $la^4 = 4$, $la^5 = 5$ и такъ далѣе.

222.

Положивъ $b = 0$, будетъ о логарифмъ числа a^0, но $a^0 = 1$ и такъ $l1 = 0$, какой бы корень мѣсто a взятъ ни былъ. Когда же положится $b = -1$, то будетъ -1 логарифмъ числа a^{-1}, но $a^{-1} = \frac{1}{a}$, слѣдовательно $l\frac{1}{a} = -1$. Подобнымъ образомъ получатся $l\frac{1}{a^2} = -2$, $l\frac{1}{a^3} = -3$, $l\frac{1}{a^4} = -4$ и протч.

223.

Отсюда видно, какъ изъявляются логарифмы всѣхъ степеней корня a, да и самыхъ дробей, коихъ числитель $= 1$, а знаменатель степень изъ a, въ которыхъ случаяхъ логарифмы суть цѣлыя числа. Но естьли вмѣсто b возмутся дроби, то будутъ оные логарифмы неизвлекомыхъ чиселъ. т. е. когда $b = \frac{1}{2}$, будетъ $\frac{1}{2}$ логарифмъ числа $a^{\frac{1}{2}}$ или числа $\sqrt{a}$ и по сему получится $l\sqrt{a} = \frac{1}{2}$, такимъ же образомъ $l\sqrt[3]{a} = \frac{1}{3}$; $l\sqrt[4]{a} = \frac{1}{4}$ и такъ далѣе.

224.

Но ежели логарифмъ другаго числа, нежели c найти должно будетъ, то легко

легко усмотрѣть можно, что оной ни цѣлое число ни дробь быть не можетъ; между тѣмъ однакожъ выдетъ всегда такой показатель b, что степень a^b данному числу c равна, и $b = lc$; слѣдовательно вообще $a^{lc} = c$.

225.

Возмемъ теперь другое число d въ разсужденіе, и изъявимъ логарифмъ онаго чрезъ ld такъ, что $a^{ld} = d$, помножь теперь сію формулу на прежнюю, то получится $a^{lc+ld} = cd$; но показатель всегда бываетъ логарифмъ степени cd слѣдовательно $lc + ld = lcd$. Когда же первая формула на вторую раздѣлится, то выдетъ $a^{lc-ld} = \frac{c}{d}$, слѣдовательно будетъ $lc - ld = l\frac{c}{d}$.

226.

Сіе ведетъ насъ къ двумъ главнѣйшимъ свойствамъ логарифмовъ, изъ которыхъ первое состоитъ въ уравненіи $lc + ld = lcd$; по сему научаемся мы, что логарифмъ произведенія cd найдется когда логарифмы множителей сложатся

жатся вмѣстѣ. Другое свойство содержится въ уравненіи $lc - cd = l\frac{c}{d}$ и показываетъ намъ, что логарифмъ дроби сыщется, когда изъ логарифма числителя вычтется логарифмъ знаменателя.

227.

И въ семъ то состоитъ знатная польза, которую подаютъ логарифмы въ выкладкахъ; ибо когда два числа одно на другое помножить или раздѣлить надобно будетъ, то надлежитъ только оныхъ логарифмы слагать или вычитать. Но очевидно есть, что несравненно легче числа складывать или вычитать, нежели множить или дѣлить, а особливо большія числа.

228.

Еще важнѣе оныхъ польза въ степеняхъ и въ извлеченіи корней; ибо когда $d = c$, то по первому свойству будетъ $lc + lc = lcc$ и такъ $lcc = 2lc$. Такимъ же образомъ получится $lc^3 = 3lc$, $lc^4 = 4lc$ и вообще $lc^n = nlc$. Возми теперь вмѣсто

n ломаныя числа, то получишь $lc^{\frac{1}{2}}$ т. е. $l\sqrt{c} = \frac{1}{2}lc$, также когда возмешь отрицательныя числа lc^{-1} т. е. $l\frac{1}{c} = -lc$, lc^{-2} т. е. $l\frac{1}{cc} = -2lc$ и такъ далѣе.

229.

Когда въ рукахъ будутъ такіе таблицы, въ которыхъ для всѣхъ чиселъ вычислены логарифмы, то при помощи оныхъ съ легчайшимъ трудомъ наитруднѣйшія вычисленія дѣлать можно, гдѣ большое умноженіе или дѣленіе, такожде возвышеніе степеней и извлеченіе корней случаются. По тому что въ сихъ таблицахъ, какъ для каждаго числа логарифмъ, такъ и для каждаго логарифма самое число сыскать можно. Такъ ежели изъ числа c корень квадратной найти надобно будетъ, то ищется сперьва логарифмъ числа c, а потомъ онаго берется половина, которая есть $\frac{1}{2}lc$, и которая есть логарифмъ искомаго квадратнаго корня, или число, которое соотвѣтствуетъ сему логарифму и въ

таб

таблицахЪ найдено, есть самой квадратной корень.

230.

Мы уже видѢли прежде, что 1, 2, 3, 4, 5, 6 и проч. слѢдовательно всѢ положительныя числа суть логарифмы корня a и его положительныхЪ степеней, т. е. чиселЪ, которыя больше 1цы.

НапротивЪ того отрицательныя числа, яко -1, -2 и протч. суть логарифмы дробей $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$ и протч. которые меньше 1цы, однако больше нежели 0.

Отсюда слѢдуетЪ, что когда логарифмЪ есть положительной, то соотвѢтствующее ему число будетЪ больше 1цы.

Естьли же логарифмЪ будетЪ отрицательной, то принадлежащее ему число будетЪ меньше 1цы, однакожЪ больше нежели 0. СлѢдовательно для отрицательныхЪ чиселЪ логарифмовЪ изЪявить не возможно или логарифмы отрицательныхЪ чиселЪ суть невозможные и надлежатЪ до рода мнимыхЪ чиселЪ.

231.

231.

Для большей ясности надлежитъ здѣсь брать за корень a опредѣленное число, и притомъ то самое, по которому употребительные логарифмовъ таблицы вычислены. А берется тутъ за корень a число 10, потому что уже по оному вся изчисленія наука установлена. Но легко усмотрѣть можно, что вмѣсто онаго каждое другое число, которое бы только было больше 1цы, взять можно; ежели же положится $a = 1$, то всѣ ея степени будутъ какъ $a^b = 1$ и никогда другому данному числу c равны не будутъ.

ГЛАВА XXII.

О употребительныхъ таблицахъ логарифмовъ.

232.

Въ сихъ таблицахъ, какъ уже упомянуто, полагается за основаніе, что корень $a = 10$, такимъ образомъ логарифмъ

риѳмъ каждаго числа c, будетъ тотъ показатель, до котораго число 10 возвышено, а степень равна самому тому числу; или когда логариѳмъ числа c изъявится чрезъ lc, то будетъ завсегда $10^{lc} = c$.

233.

Мы уже примѣтили, что логарифмъ 1цы всегда бываетъ 0, потому что; $10^0 = 1$ и такъ $l1 = 0$, $l10 = 1$, $l100 = 2$, $l1000 = 3$, $l10000 = 4$, $l100000 = 5$, $l1000000 = 6$, потóмъ $l\frac{1}{10} = -1$; $l\frac{1}{100} = -2$, $l\frac{1}{1000} = -3$, $l\frac{1}{10000} = -4$, $l\frac{1}{100000} = -5$, $l\frac{1}{1000000} = -6$.

234.

Чѣмъ легче логариѳмы сихъ главныхъ чиселъ находятся, тѣмъ труднѣе искать логариѳмы всѣхъ протчихъ чиселъ, кои равнымъ образомъ въ таблицахъ изъявлены быть долженствуютъ. Здѣсь еще не мѣсто дать довольное показанiе, какимъ образомъ оные находить должно; чего ради разсмотримъ только вообще, что при семъ примѣчать надлежитъ.

235.

Когда логарифмЪ 1цы есть 0, $l\,10 = 1$, то легко уразумѢть можно, что всѢхЪ чиселЪ между 1 и 10 логариθмы, содержаться должны между 0 и 1, или они будутЪ больше нежели 0, а меньше 1цы. ВозмемЪ вЪ разсужденїе число 2 и означимЪ его логариθмЪ буквою x т. е. $l\,2 = x$, то извѢстно, что x будетЪ больше оля, а меньше 1цы, оно должно быть такое число, чтобЪ 10^x точно было равно 2мЪ. Легко также усмотрѢть можно, что x гораздо менѢе быть доженЪ, нежели $\frac{1}{2}$ или что $10^{\frac{1}{2}}$ болѢе 2хЪ, ибо взявЪ сЪ обѢихЪ сторонЪ квадраты, будетЪ квадратЪ изЪ $10^{\frac{1}{2}} = 10$, а квадратЪ изЪ 2хЪ есть 4, слѢдовательно гораздо меньше. ПодобнымЪ образомЪ $\frac{1}{3}$ еще вмѢсто x велика, или $10^{\frac{1}{3}}$ больше 2хЪ; ибо кубЪ изЪ $10^{\frac{1}{3}} = 10$, а кубЪ изЪ 2хЪ $= 8$. НапротивЪ того взятая на мѢсто x, $\frac{1}{4}$ будетЪ мала; ибо 4тая степень изЪ $10^{\frac{1}{4}} = 10$, а изЪ 2хЪ

$= 16$

$=16$. И такЪ изЪ сего явствуетЪ, что x или $l2$ есть меньше $\frac{1}{3}$, а больше $\frac{1}{4}$. ТакимЪ образомЪ для каждой средней между ими дроби найти можно, будетЪ ли оная больше или меньше, какЪ наприм. $\frac{2}{7}$ меньше, нежели $\frac{1}{3}$, а больше нежели $\frac{1}{4}$: естьли же теперь взять вмѣсто x, $\frac{2}{7}$, то должно бы $10^{\frac{2}{7}} = 2$ и когда бы сїе такЪ было, то надлежалобЪ седьмымЪ степенямЪ, какЪ одной такЪ и другой быть равнымЪ, но изЪ $10^{\frac{2}{7}}$ 7мая степень $= 10^2 = 100$, которая 7мой степени числа 2хЪ равна быть должна, но 7мая степень 2хЪ $= 128$ и слѣдовательно больше прежней, и $10^{\frac{2}{7}}$ меньше нежели 2, слѣдовательно $\frac{2}{7}$ меньше нежели $l2$, или $l2$ больше нежели $\frac{2}{7}$ однакожЪ меньше $\frac{1}{3}$ ти.

Пусть такая дробь будетЪ $\frac{3}{10}$: то должно бы теперь $10^{\frac{3}{10}} = 2$, а когда сїе такЪ, то надлежало бы 10той степени, какЪ одной, такЪ и другой быть равнымЪ; но 10тая степень изЪ $10^{\frac{3}{10}} = 10^3 = 1000$

изЪ 2хЪ же 10тая степень $=1024$, откуда заключаемЪ, что $\frac{3}{10}$ еще малы, или $l2$ больше нежели $\frac{3}{10}$, однакожЪ меньше $\frac{1}{3}$ти.

236.

Сіе разсужденіе служитЪ кЪ показанію, что $l2$ опредѣленную свою величину имѣетЪ, ибо знаемЪ мы, что оной за подлинно больше $\frac{3}{10}$, а меньше $\frac{1}{3}$ти. Далѣе продолжать здѣсь мы еще не можемЪ, и поелику подлиннаго знаменованія не знаемЪ, то будемЪ вмѣсто онаго употреблять букву x, такЪ что $l2=x$ и покажемЪ, естьли бы оной былЪ найденЪ, то какимЪ образомЪ найти оттуда можно логариѳмы другихЪ безконечно многихЪ чиселЪ; кЪ чему служитЪ прежде показанное уравненіе $lcd = lc + ld$; или что логариѳмЪ произведенія найдется, когда логариѳмы множителей сложатся вЪ одну сумму.

237.

Когда $l2=x$, а $l10=1$, то получится $l20=x+1$, $l200=x+2$,

$l2000$

$l2000 = x+3$, $l20000 = x+4$, $l200000 = x+5$ и такъ далѣе.

228.

Когда $lc^2 = 2lc$ $lc^3 = 3lc$, $lc^4 = 4lc$ и прочч то получаемъ мы отсюда $l4 = 2x$, $l8 = 3x$, $l16 = 4x$, $l32 = 5x$, $l64 = 6x$ и прочч. изъ сихъ находимъ далѣе $l40 = 2x+1$, $l400 = 2x+2$, $l4000 = 2x+3$, $l40000 = 2x+4$ и прочч. $l80 = 3x+1$, $l80 = 3x+2$, $l8000 = 3x+3$, $l80000 = 34+4$ и прочч $l160 = 4x+1$, $l1600 = 4x+2$, $l16000 = 4x+3$, $l160000 = 4x+4$ и прочч.

229.

Понеже найдено еще $l\frac{c}{d} = lc - ld$, то положимъ $c = 10$, $d = 2$, но когда $l10 = 1$, $l2 = x$ то получимъ $l\frac{10}{2}$, т. е. $l5 = 1 - x$, изъ сего $l50 = 2 - x$, а $l500 = 3 - x$, $l5000 = 4 - x$ и прочч потóмъ $l25 = 2 - 2x$, $l125 = 3 - 3x$, $l625 = 4 - 4x$ и прочч изъ сихъ находимъ далѣе слѣдующее $l250 = 3 - 2x$, $l2500 = 4 - 2x$, $l25000 = 5 - 2x$ и прочч. еще же $l1250$

$= 4 - 3x$; $l12500 = 5 - 3x$, $l125000 = 6 - 3x$ и протч. такожде $l6250 = 5 - 4x$, $l62500 = 6 - 4x$; $l625000 = 7 - 4x$ и такъ далѣе.

240.

Естьли бы логариѳмъ 3хъ найденъ былъ, то бы можно было опредѣлить логариѳмы еще безконечно многихъ чиселъ; положимъ вмѣсто $l3$ букву y то будемъ имѣть $l30 = y + 1$, $l300 = y + 2$, $l3000 = y + 3$ и протч. $l9 = 2y$, $l27 = 3y$, $l81 = 4y$, $l243 = 5y$ и протч а изъ сихъ далѣе найдемъ $l6 = x + y$, $l12 = 2x + y$, $l18 = x + 2y$, такожде $l15 = l3 + l5 = y + 1 - x$.

241.

Мы выше сего видѣли, что всѣ числа выходятъ чрезъ умноженіе изъ такъ называемыхъ первыхъ чиселъ; слѣдовательно когда логариѳмы сихъ будутъ извѣстны, то можно найти изъ нихъ логариѳмы всѣхъ другихъ чиселъ, по одному только сложенію, какъ наприм. числа 210, которое состоитъ изъ слѣдующихъ

мно-

множителей 2. 3. 5. 7; будетъ логариѳмъ $= l2 + l3 + l5 + l7$: равнымъ образомъ когда $360 = 2.2.2.\ 3.3.5 = 2^3.\ 3^2.5$, то будетъ $l360 = 3\,l2 + 2\,l3 + l5$, откуда явствуетъ, какимъ образомъ изъ логариѳмовъ первыхъ чиселъ логариѳмы всѣхъ другихъ чиселъ опредѣлить можно. И такъ при дѣланїи логариѳмическихъ таблицъ о томъ должно только стараться, чтобъ найдены были логариѳмы первыхъ чиселъ.

ГЛАВА XXIII.

О способѣ представлять логариѳмы.

242.

Видѣли мы, что логариѳмъ 2 хъ больше нежели $\frac{3}{10}$ а меньше $\frac{1}{3}$ ти; или что показатель 10 ти долженъ падать между сими двумя дробями, ежели степень должна быть равна 2 мъ. А дробь можно взять, какую кто пожелаетъ, то степень завсегда будетъ не извлекомое число

или больше или менше 2 хЪ, чего ради логариѳма 2 хЪ такою дробью изЪявить не можно. И такЪ должно довольствоваться когда величину онаго опредѣлимЪ чрезЪ приближеніе такЪ, чтобЪ погрѣшность была не чувствительна. КЪ сему употребляются такЪ называемые *десятичные* дроби, которыхЪ натуру и свойство истолковать здѣсь яснѣе потребно.

243.

Не безЪизвѣстно, что всѣ числа пишутся обыкновенно сими 10ю знаками, яко 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, они на первомЪ только сЪ правой руки мѣстѣ, собственное свое знаменованіе имѣютЪ, а на второмЪ мѣстѣ знаменованіе ихЪ бываетЪ вЪ 10 разЪ больше, на третьемЪ вЪ 100 разЪ на четвертомЪ вЪ 1000 разЪ и такЪ далѣе, на каждомЪ слѣдующемЪ мѣстѣ вЪ 10 разЪ больше нежели на предЪидущемЪ.

ТакЪ вЪ семЪ числѣ 1767 стоитЪ, на первомЪ мѣстѣ сЪ правой руки знакЪ

7,

7, которой дѣйствительно 7 и значитъ, на второмъ мѣстѣ стоятъ 6, кои не просто 6 но 10 6 или 60 показываютъ знакъ 7 на третьемъ мѣстѣ значитъ 100 7 или 700, и наконецъ 1 на четвертомъ значитъ 1000 и выговаривается сїе число такъ:

Тысяча семъ сотъ шестьдесятъ семь.

244.

Когда теперь отъ правой руки къ лѣвой знаменованїе знаковъ въ десятеро больше бываетъ, и слѣдовательно отъ лѣвой къ правой въ 10 разъ меньше; то по сему правилу можно продолжать сїе далѣе подвигаяся въ правую сторону, и тогда знаменованїе знаковъ будетъ всегда въ десять разъ меньше. Но здѣсь над лежитъ замѣтить то мѣсто, гдѣ знаки собственное свое знаменованїе имѣютъ, а сїе дѣлается запятою, которая позади сего мѣста ставится. И такъ когда сїе число написано будетъ 36, 5 4892, то оное такъ разумѣть дол-

жно; вопервыхъ знакъ 6 имѣетъ свое собственное знаменованіе, знакъ 3 на второмъ мѣстѣ значитъ 30, а позади запятой знакъ 5 значитъ только $\frac{5}{10}$ слѣдующей по немъ 4 = $\frac{4}{100}$, знакъ 8 = $\frac{8}{1000}$, знакъ 9 = $\frac{9}{10000}$, и послѣдней 2 = $\frac{2}{10000}$. Откуда видно, чѣмъ далѣе сіи знаки въ правую сторону продолжаются, то знаменованіе ихъ столь мало наконецъ бываетъ, что они за ничто почесться могутъ.

245.

Сей способъ изъявлять числа называется десятичною дробью, и по сему способу логарифмы въ таблицахъ представлены, гдѣ логариѳмъ 2хъ изъявляется такъ 0, 3010300, при чемъ примѣчать должно, что ежели предъ запятою стоитъ 0, то такой логарифмъ цѣлаго числа не составляетъ, и что знаменованіе его есть $\frac{3}{10} + \frac{0}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{0}{10000} + \frac{3}{100000} + \frac{0}{1000000} + \frac{0}{10000000}$ и по сему можно бы послѣдніе 2 знака отбросить, но оные для того только удерживаются, чтобъ показать, что нѣтъ дѣйствительно ни одной изъ

изъ сихъ частицъ; но симъ не опровергается, будтобы уже́ далѣе никакихъ малыхъ частицъ не слѣдовало, но оные ради ихъ малости за ничто почитаются.

246.

Логарифмъ 3хъ изображается такъ 0, 4771213 откуда явствуетъ, что онъ не составляетъ цѣлаго, но стоитъ изъ сихъ дробей $\frac{4}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\frac{1}{10000}+\frac{2}{100000}+\frac{1}{1000000}+\frac{3}{10000000}$; не должно думать, чтобъ сей логарифмъ такимъ образомъ изъявленъ былъ весьма точно; но столько извѣстно, что погрѣшность за подлинно меньше $\frac{1}{10000000}$ части, которая и въ самомъ дѣлѣ столь мала, что ея во всѣхъ почти изчисленіяхъ опустить можно.

247.

По сему способу логариѳмъ 1цы изъявляется такъ 0, 0000000, ибо оной дѣйствительно есть 0, логарифмъ 10ти есть 1, 0000000, откуда видѣть можно; что оной есть точно 1, логарифмъ 100 есть 2, 0000000 или точно 2, отсюда

ЯВ-

явствуетъ, что логарифма чиселъ между 10 и 100 содержащихся , или которыя изображаются двумя знаками , будутъ между 1 цею и 2 мя слѣдовательно изъявляются 1 цею и десятичною дробью ; такъ $l 50 = 1, 6989700$, слѣдов. онъ равенъ цѣлой 1 цѣ и сверьхъ ея еще $\frac{6}{10}+\frac{9}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{9}{10000}+\frac{7}{100000}$; а тѣхъ чиселъ , кои между 100 и 1000 находятся логариѳмы будутъ 2 съ приложенною десятичною дробью , яко $l 800 = 2, 90\,30\,900$; чиселъ отъ 1000 до 10000 логарифмы больше нежели 3, а отъ 10000 до 100000 больше 4 хъ и такъ далѣе.

248.

Чиселъ меньше 10 ти, и которыя пишутся однимъ знакомъ, логариѳмы несоставляютъ еще цѣлаго , и для того предъ запятою стоитъ 0. Въ каждомъ логариѳмѣ двѣ части примѣчать надлежитъ , первая стоитъ предъ запятою и показываетъ цѣлыя числа, а другая часть изъявляетъ десятичные дроби , которые къ цѣлому приставляются. И такъ первую

вую или цѣлую логариѳма часть легко можно знать, потому, что оная бываетъ 0 для всѣхъ чиселъ, которыя состоятъ изъ одного знака; для чиселъ изъ двухъ знаковъ состоящихъ въ логариѳмахъ цѣлое будетъ 1 Цѣлое 2 будетъ въ логариѳмахъ такихъ чиселъ, кои состоятъ изъ 3хъ знаковъ и такъ далѣе; цѣлое звсегда бываетъ 1 цею меньше противъ числа знаковъ: такъ, когда требуется логариѳмъ числа 1-67, то уже извѣстно, что первая или цѣлая онаго часть должна быть 3.

249.

Теперь наизворотъ имѣя первую логариѳма часть, можно знать изъ сколькихъ знаковъ самое число состоять будетъ Понеже число знаковъ однимъ бываетъ больше противъ цѣлой логариѳма части; и такъ когда не извѣстнаго числа, найденъ будетъ сей логарифмъ 6, 477-1213, то можно заразъ знать, что соотвѣтствующее ему число изъ 7ми состоитъ знаковъ и слѣдовательно должно

жно быть больше нежели 1000000, сіе число и въ самомъ дѣлѣ есть 3000000. ибо $l\,3000000 = l3 + l\,1000000$, но $l3 = 0,4771213$, $l1000000 = 6$, которые оба логарифма сложенные вмѣстѣ даютъ 6, 4771213.

250.

По сему во всякомъ логариѳмѣ, главное дѣло состоитъ въ слѣдующей за запятою десятичной дроби, которая когда разъ уже извѣстна, то для многихъ чиселъ служить можетъ; а что бы сіе показать, то возмемъ мы въ рассужденіе логариѳмъ числа 365, котораго первая часть есть безспорно 2, а вмѣсто другой части, т. е. десятичной дроби, напишемъ для краткости букву x, такъ, что $l365 = 2 + x$, отсюда получаемъ мы, когда далѣе на 10 множить станемъ: $l3650 = 3 + x$, $l36500 = 4 + x$, $l365000 = 5 + x$; можемъ также назадъ возвратиться и дѣлить на 10, то получимъ $l36,5 = 1 + x$, $l3,65 = 0 + x$, $l0,365 = -1 + x$; $l0,0365 = -2 + x$; $l0,00365 = -3 + x$ и такъ далѣе.

251.

Для всѣхъ тѣхъ чиселъ, которыя изъ знаковъ 365 произходятъ имѣя предъ собой или позади 0, всегда та же самая десятичная дробь въ ихъ логариѳмахъ будетъ; а разность состоитъ только въ цѣломъ числѣ предъ запятою, которое, какъ мы видѣли, быть также можетъ и отрицательнымъ; а имянно когда число будетъ меньше 1цы. Но понеже простые выкладчики не очень горазды обходиться съ отрицательными числами, для того въ такихъ случаяхъ цѣлое число 10ю увеличивается и вмѣсто 0 ставится обыкновенно предъ запятою 10, по сему вмѣсто −1 получится 9; вмѣсто −2 получится 8, а вмѣсто −3, 7 и такъ далѣе. Но при семъ не должно никогда забывать, что цѣлыя предъ запятою числа десяткомъ увеличены, дабы не заключить изъ того, что число состоитъ изъ 10, или 9, или 8 знаковъ; но что число стоитъ позади запятой на первомъ мѣстѣ, когда съ начала логариѳма стоятъ 9; или на второмъ, ежели 8, или на треть-

третьемъ, когда 7 стоятъ съ начала логариѳма. Такимъ образомъ изображены въ таблицахъ логариѳмы синусовъ.

252.

Въ обыкновенныхъ таблицахъ десятичные для логариѳмовъ дроби состоятъ изъ 7ми знаковъ, изъ которыхъ послѣдней значитъ $\frac{1}{10000000}$ часть и твердо можно положиться, что оная дробь ни на одну такую часть отъ правды не отходитъ, которая обыкновенно погрѣшность ничего не значитъ; а естьли бы логариѳмы еще точнѣе вычислить за благо разсудилось, то должно бы ихъ представить больше нежели въ 7ми знакахъ, что въ большихъ Улаковыхъ таблицахъ и учинено, гдѣ логариѳмы вычислены до 10 знаковъ.

253.

Понеже первая логариѳма часть, никакой трудности не имѣетъ, то оная въ таблицахъ и не ставится, а находятся только тамъ 7 знаковъ десятичной

ной дроби, которая другую часть составляетЪ и вЪ АглинскихЪ таблицахЪ находятся оные для всѢхЪ чиселЪ отЪ 1 до 100000 изображены; но когда еще большiя числа случатся, то приложены малинкiе таблички изЪ коихЪ видѢть можно, сколько еще слѢдующихЪ знаковЪ кЪ логариѳму придать надлежитЪ.

254.

И такЪ отсюда легко разумѢть можно какимЪ образомЪ найденному логариѳму соотвѢтствующее число вЪ таблицахЪ брать должно; а чтобы самое дѢло лутче изЪяснить, то помножимЪ сiи между собою числа 343 и 2401; но понеже ихЪ логарифмы слагать должно, то производится выкладка такимЪ образомЪ:

$$\left.\begin{array}{r} l343 = 2,\ 5352941 \\ l2401 = 3,\ 3803922 \end{array}\right\} \text{сложить}$$

$$\left.\begin{array}{r} 5,\ 9156863 \\ 6847 \end{array}\right\} \text{вычесть}$$

$$823543 \qquad \overline{16}$$

Сїя сумма есть логариѳмъ произведенїя; изъ первой онаго части познаемъ мы, что произведенїе изъ 6 знаковъ состоять должно, которое изъ десятичной дроби при помощи таблицъ найдено 823543 и сїе есть подлинное искомое произведенїе.

Понеже логариѳмы при извлеченїи корней великую пользу приносятъ, то хотимъ мы сїе однимъ изъяснить примѣромъ.

Пусть должно будетъ изъ числа 10ти найти квадратной корень, то надлежитъ здѣсь логариѳмъ числа 10ти, которой есть 1, 0000000 раздѣлить на 2, частное будетъ 0, 5000000 логариѳмъ искомаго корня, а корень самъ изъ таблицъ найдется 3, 16228, котораго квадратъ и въ самомъ дѣлѣ только $\frac{1}{100000}$ частицею больше нежели 10.

конецъ первой части о разныхъ родахъ изчисленія простыхъ количествъ.

ЧАСТЬ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ,

о разныхъ родахъ изчисленія, составныхъ количествъ.

ГЛАВА I.

О сложеніи составныхъ количествъ.

256.

Когда двѣ или больше формулы состоящїе изъ многихъ членовъ сложить должно будетъ, то означается иногда сложенїе помощїю извѣстныхъ знаковъ, а имянно ставя каждую формулу въ скобкахъ и оныя знакомъ $+$ соединяя; такъ когда слѣдующїя формулы $a+b+c$ и $d+e+f$ вмѣстѣ сло-

жить надлежитъ, то означается сумма такимъ образомъ.

$$(a+b+c)+(d+e+f)$$

257.

Симъ образомъ сложеніе только означается, а не совсѣмъ совершается; но не трудно усмотрѣть, что для совершенія онаго однѣ только скобки оставить должно; ибо когда число $d+e+f$ къ первому придать надлежитъ, то учинится сіе ежели сперьва $+d$, потóмъ $+e$, а наконецъ $+f$ приставишь, тогда сумма будетъ:

$$a+b+c+d+e+f$$

Сіе также примѣчать надлежитъ, ежели нѣкоторые члены будутъ имѣть знакъ $-$, то должно только ихъ поставить съ ихъ знаками.

258.

А что бы сіе яснѣе показать, то возмемъ мы примѣръ въ числахъ и къ формулѣ $12-8$, придадимъ еще сію $15-6$.

Придай

Придай вопервымъ 15, то будетъ $12-8+15$, но теперь уже придано много, потому что $15-6$ придать только надлежитъ, и такъ видно, что 6 излишны, чего ради отними сїи 6 или напиши оные съ ихъ знакомъ, то получится точная сумма $12-8+15-6$. Откуда явствуетъ, что сумма найдется, когда всѣ члены каждой съ своимъ знакомъ поставятся.

259.

Когда къ формулѣ $a-b+c$ придать должно еще сїю $d-e-f$, то сумма изъявляется слѣдующимъ образомъ $a-b+c+d-e-f$; при томъ надлежитъ примѣчать, что на порядокъ членовъ смотрѣть здѣсь нечего, но что оныя по произволенїю переставлены между собою быть могутъ, лишь бы только каждой поставленной передъ нимъ знакъ имѣлъ. Такимъ образомъ можно бы помянутую сумму написать и такъ $c-e+a-f+d-b$.

260.

И по сему сложеніе не имѣетъ ни-малѣйшаго затрудненія, какой бы видъ члены ни имѣли; такъ когда къ формулѣ $2a^3 + 6\sqrt{b} - 4lc$ надлежитъ придать еще сію $5\sqrt[5]{a} - 7c$, будетъ сумма $2a^3 + 6\sqrt{b} - 4lc + 5\sqrt[5]{a} - 7c$; почему видно, что сія есть искомая сумма; при семъ также позволяется переставлять члены между собою по изволенію удержавъ только при каждомъ членѣ его знакъ.

261.

Часто случается, что найденная такимъ образомъ сумма гораздо короче изобразиться можетъ; потому что иногда 2 или больше членовъ совсѣмъ уничтожаются. Такъ ежелибы въ суммѣ слѣдующіе члены $+a-a$ или такіе $3a-4a+a$ случились; или по крайней мѣрѣ одинъ бы членъ составили, яко $3a+2a=5a$; $7b-3b=+4b$; $-6c+10c=+4c$, $5a-8a=-3a$; $-7b+b=-6b$; $-3c-4c=-7c$; $2a-5a=-3a$; $-3b-5b+2b=-6b$.

Сїе сокращенїе тогда только имѣетъ мѣсто, когда 2 или больше членовъ въ разсужденїи буквъ совсѣмъ одинаковы; слѣдовательно $2aa + 3a$ сократить нельзя и $2b - b^4$ также сокращены быть не могутъ.

262.

Разсмотримъ нѣсколько примѣровъ такого свойства и пусть должно будетъ сложить слѣдующїе двѣ формулы $a + b$ и $a - b$, здѣсь по прежнимъ правиламъ выдетъ сумма $a + b + a - b$, но $a + a = 2a$, а $b - b = 0$, слѣдовательно сумма $= 2a$; сїе такъ выговорить можно: ежели къ суммѣ двухъ чиселъ $(a + b)$ придастся ихъ разность $(a - b)$ сумма будетъ большее дважды взятое. Разсматривай еще слѣдующїе примѣры.

$3a - 2b - c$	$a^3 - 2aab + 2abb$
$5b - 6c + a$	$-aab + 2abb - b^3$
$4a + 3b - 7c$	$a^3 - 3aab + 4abb - b^3.$

ГЛАВА II.

О вычитаніи составныхъ количествъ.

263.

Ежели вычитаніе означить только потребно будетъ, то ставится каждая формула въ скобки, и та, которую вычитать должно ставится съ знакомъ $-$ возлѣ той изъ которой вычитать надлежитъ; такъ когда изъ формулы $a-b+c$ надлежитъ вычесть сію $d-e+f$, то требуемой остатокъ изображается такимъ образомъ $(a-b+c)-(d-e+f)$: откуда явствуетъ, что послѣднюю формулу изъ первой вычитать должно.

264.

А что бы вычитаніе дѣйствительно совершить, то вопервыхъ примѣчать должно, что ежели изъ одного количества a другое положительное $+b$ вычтется, то получится остатокъ $a-b$, естьли же отрицательное число какъ $-b$ должно будетъ вычесть, то выдетъ $a+b$,

ибо долгъ вычитать тоже есть самое, какъ бы нѣчто дать.

265.

Положимъ теперь, что изъ формулы $a-c$ надлежитъ вычесть сїю $b-d$; отними сперва b, то получится $a-c-b$, но теперь уже отнято много; ибо должно было только отнять $b-d$, слѣдовательно количествомъ d больше отнято, и такъ сїе d паки придать надлежитъ то получится:

$$a-c-b+d$$

Откуда выходитъ сїе правило: всѣ члены той формулы, которую вычитать надлежитъ съ противными знаками поставлены быть долженствуютъ.

266.

Помощїю сего правила весьма легко вычитанїе сдѣлать можно, ибо та формула, изъ которой вычитать должно, ставится просто, а та, которую вычитать надлежитъ, съ противными зна-

ками къ оной присовокупляется; такъ въ первомъ примѣрѣ изъ формулы $a-b+c$ вычесть должно сїю $d-e+f$, получится $a-b+c-d+e-f$, а что бы сїе изъяснить въ самыхъ числахъ, то вычти изъ $9-3+2$ сїю формулу $6-2+4$, въ остаткѣ будетъ $9-3+2-6+2-4=0$ или $9-3+2=8$; $6-2+4=8$; а $8-8=0$.

267.

Когда вычитанїе никакой трудности въ себѣ не имѣетъ, то осталось только примѣчать, что въ найденномъ остаткѣ 2 или больше членовъ быть могутъ, кои въ разсужденїи буквъ одинаковы, и тогда можно дѣлать сокращенїе по тѣмъ же правиламъ, которыя предписаны выше сего при сложенїи.

268.

Изъ суммы двухъ чиселъ $a+b$ надлежитъ вычесть ихъ разность $a-b$; получится вопервыхъ $a+b-a+b$; но $a-a=0$, $b+b=2b$ слѣдовательно искомой остатокъ есть $2b$, т. е. меньшее число b удвоенное.

269.

Къ большему изъясненїю присоединимъ еще нѣкоторые примѣры.

$aa + ab + bb$	$3a - 4b + 5c$
$bb - ab + aa$	$2b + 4c - 6a$
$2ab$	$9a - 6b + c$

$$\begin{array}{l} a^3 + 3aab + 3abb + b^3 \\ a^3 - 3aab + 3abb - b^3 \\ \hline 6aab + 2b^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{a} + 2\sqrt{b} \\ \sqrt{a} - 3\sqrt{b} \\ \hline 5\sqrt{b} \end{array}$$

ГЛАВА III.

О умноженїи составныхъ количествъ.

270.

Ежели умноженїе означить только потребно будетъ, то включается каждая формула въ скобки и присоединяется одна къ другой или безъ знака, или посред-

средствомЪ поставленной между ими точки; такЪ когда сіи двѣ формулы $a-b+c$ и $d-e+f$ помножить должно, то изЪявляется произведеніе такЪ $(a-b+c)$, $(d-e+f)$, или $(a-b+c)$ $(d-e+f)$. Сей способЪ очень часто употребляется, потому что изЪ онаго видно, изЪ какихЪ множителей состоитЪ такое произведеніе.

271.

Но что бы показать, какимЪ образомЪ умноженіе вЪ самомЪ дѣлѣ совершается, то прежде всего надлежитЪ примѣчать, что ежели формулу $a-b+c$ на 2 помножить должно, то каждой ея членЪ особенно на 2 множится и посему выдетЪ $2a-2b+2c$.

Сіе же самое дѣлается и со всѣми другими числами; такЪ когда ту же формулу на d помножить должно, то получится вЪ произведеніи $ad-bd+cd$.

272.

Здѣсь показали мы, что число d есть положительное, но ежели отрица-

тельнымЪ числомЪ какЪ $-e$ множить должно, то прежде показанныя правила на память привесть надлежитЪ, а имянно что 2 разные знака вЪ произведенїи даютЪ $-$, а два одинакїе $+$, почему получится $-ae+bc-ce$.

273.

Когда же одну формулу простая ли она будетЪ или составная, какЪ A помножить должно, на составную $d-e$, то возмемЪ сперьва самые числа вЪ разсужденїе, и положимЪ, что A надлежитЪ помножить на $7-3$; здѣсь видно, что требуется четырежды взятое A: будеже сперва возмется A 7 разЪ, то надлежитЪ трижды взятое A изЪ онаго вычесть. РавнымЪ образомЪ также и вообще когда на $d-e$ помножить должно, то помножь сперва формулу A на d, а потомЪ на e и послѣднее произведенїе вычти изЪ перваго, такЪ что выдетЪ $dA-eA$. ПоложимЪ теперь, что $A=a-b$, которое на $d-e$ надлежитЪ умножить, то получимЪ мы:

da

$$dA = ad - bd$$
$$eA = ae - be$$

$ad-bd-ae+be$ требуемое произведеніе.

274.

Нашедъ произведеніе $(a-b).(d-e)$ и о точности онаго, будучи увѣрены представимъ теперь сей умноженія примѣръ яснѣе такимъ образомъ.

$$\begin{array}{c} a-b \\ d-e \\ \hline ad-bd-ae+be \end{array}$$

Отсюда усматриваемъ мы, что каждой членъ верхней формулы на каждой исподней помноженъ, наблюдая притомъ вездѣ предписанное о знакахъ правило; чѣмъ снова подтверждается, ежели бы еще кто имѣлъ какое въ томъ сомнѣніе.

275.

По силѣ сего правила легко будетъ слѣдующей примѣръ вычислить; $a+b$ надлежитъ помножить на $a-b$.

$$\begin{array}{l} a+b \\ a-b \\ \hline aa+ab \\ \quad\;\; -ab-bb \\ \hline \end{array}$$

произведенїе будетъ $aa-bb$.

276.

И такъ когда вмѣсто a и b положены будутъ опредѣленныя числа по произволенїю, то ведетъ насъ сей примѣръ къ слѣдующей правдѣ: ежели сумма двухъ чиселъ помножится на ихъ разность, произведенїе будетъ разность ихъ квадратовъ, что такимъ образомъ представить можно $(a+b)(a-b)=aa-bb$, слѣдственно разность между двумя квадратными числами есть завсегда произведенїе изъ суммы двухъ чиселъ на ихъ разность, и можетъ какъ на сумму, такъ и на разность корней раздѣлиться, и по сему первымъ числомъ не будетъ.

277.

Вычислимъ еще слѣдующїе примѣры.

1)

1)
$$\begin{array}{r} 2a-3 \\ a+2 \\ \hline 2aa-3a \qquad \\ +4a-6 \\ \hline 2aa+a-6 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} 4aa-6a+9 \\ 2a+3 \\ \hline 8a^3-12aa+18a \qquad \\ +12aa-18a+27 \\ \hline 8a^3 \qquad\qquad +27 \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r} 3aa-2ab-bb \\ +2a-4b \\ \hline 6a^3-4aab-2abb \qquad \\ -12aab+8abb+4b^3 \\ \hline 6a^3-16aab+6abb+4b^3 \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{r} aa+2ab+2bb \\ aa-2ab+2bb \\ \hline a^4+2a^3b+2aabb \qquad\qquad \\ -2a^3b-4aabb-4ab^3 \qquad \\ +2aabb+4ab^3+4b^4 \\ \hline a^4+4b^4 \end{array}$$

5)
$$\begin{array}{r} 2aa-3ab-4bb \\ 3aa-2ab+bb \\ \hline 6a^4-9a^3b-12aabb \qquad\qquad\qquad \\ -4a^3b+6aabb+8ab^3 \qquad \\ +2aabb-3ab^3-4b^4 \\ \hline 6a^4-13a^3b-4aabb+5ab^3-4b^4 \end{array}$$

б) $aa + bb + cc - ab - ac - bc$
$a + b + c$

$a^3 + abb + acc - aab - aac - abc$
$- abb - acc + aab + aac - abc + b^3 + bcc - bbc$
$- abc - bcc + bbc + c^3$

$a^3 - 3abc + b^3 + c^3$

278.

Когда больше нежели двѣ формулы одну на другую помножить должно будетъ, то легко понять можно, что умноживъ двѣ изъ оныхъ между собою, произведенїе множить потомъ надобно на слѣдующїе, притомъ все равно, какой бы порядокъ наблюдаемъ ни былъ. Когда на примѣръ слѣдующее произведенїе изъ 4 хъ множителей I$(a + b)$. II$(aa + ab + bb)$. III$(a - b)$. IV$(aa - ab + bb)$ состоящее найти должно будетъ, то умножь сперва I на II множителя.

II $aa + ab + bb$
I $a + b$

$a^3 + aab + abb$
$+ aab + abb + b^3$

I. II. $a^3 + 2aab + 2abb + b^3$

 Потомъ

Потóмъ умножь III на IV множителя, яко

$$
\begin{array}{ll}
\text{IV} & aa-ab+bb \\
\text{III} & a-b \\
\hline
 & a^3-aab+abb \\
 & \quad -aab+abb-b^3 \\
\hline
\text{III.IV.} & a^3-2aab+2abb-b^3
\end{array}
$$

Теперь осталось только прежнее произведеніе I. II умножить на сіе III. IV какъ.

$$
\begin{array}{l}
\text{I. II} = a^3+2aab+2abb+b^3 \\
\text{III. IV} = a^3-2aab+2abb-b^3 \\
\hline
a^6+2a^5b+2a^4bb+a^3b^3 \\
\quad -2a^5b-4a^4bb-4a^3b^3-2aab^4 \\
\qquad +2a^4bb+4a^3b^3+4aab^4+2ab^5 \\
\qquad\qquad -a^3b^3-2aab^4-2ab^5-b^6 \\
\hline
\end{array}
$$

a^6-b^6 искомое произведеніе

279.

Перемѣнимъ теперь порядокъ въ томъ же самомъ примѣрѣ, и сперва I формулу на III, а потóмъ II на IV помножимъ , какъ слѣдуетъ.

$$\begin{array}{ll}
\text{I } a+b & \text{II. } aa+ab+bb \\
\text{III } a-b & \text{IV. } aa-ab+bb \\
\hline
aa+ab & a^4+a^3b+aabb \\
\quad -ab-bb & \quad -a^3b-aabb-ab^3 \\
 & \qquad +aabb+ab^3+b^4 \\
\hline
\text{I.III} = aa-bb & \text{II.IV} = a^4+aabb+b^4
\end{array}$$

Теперь осталось произведенїе II.IV помножить на I.III

$$\begin{array}{l}
\text{II.IV} = a^4+aabb+b^4 \\
\text{I. III} = aa-bb \\
\hline
a^6+a^4bb+aab^4 \\
\quad -a^4bb-aab^4-b^6 \\
\hline
a^6-b^6
\end{array}$$

a^6-b^6 искомое призведенїе.

280.

Здѣлаемъ еще другимъ порядкомъ исчисленїе, и сперва I формулу на IV, а потóмъ II на III помножимъ, какъ слѣдуетъ.

$$\begin{array}{ll}
\text{IV. } aa-ab+bb & \text{III. } aa+ab+bb \\
\text{I. } a+b & \text{II. } a-b \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll} a^3-aab+abb & a^3+aab+abb \\ \quad +aab-abb+b^3 & \quad -aab-abb-b^3 \\ \text{I.IV}=a^3+b^3 & \text{II.III}=a^3-b^3 \end{array}$$

Теперь осталось помножить произведеніе I.IV на II.III.

$$\begin{array}{r} \text{I.IV}=a^3+b^3 \\ \text{II.III}=a^3-b^3 \\ \hline a^6+a^3b^3 \\ -a^3b^3-b^6 \\ \hline a^6-b^6 \end{array}$$

281.

Не безполезно изъяснить здѣсь сей примѣръ въ числахъ; пусть будетъ $a=3$ и $b=2$, будетъ $a+b=5$, $a-b=1$, потомъ $aa=9$, $ab=6$; $bb=4$, $aa+ab+bb=19$ и $aa-ab+bb=7$, и такъ ищется произведеніе 5.19.1.7, которое есть 665;

Но $a^6=720$, а $b^6=64$ слѣдовательно $a^6-b^6=665$ какъ уже мы и видѣли.

ГЛАВА IV.

О дѣленїи составныхъ количествъ.

199.

Когда дѣленїе означить только надобно будетъ, то употребляется къ сему или обыкновенной знакъ дроби, т. е. когда дѣлимое поверьхъ линѣйки, а дѣлитель подъ оною подписанъ будетъ, или включаются они оба въ скобки, и пишется дѣлитель послѣ дѣлимаго, а между ими ставятся двѣ точки: такъ ежели $a+b$, раздѣлить должно на $c+d$, то частное по первому способу изображается $\frac{a+b}{c+d}$, а по второму такъ $(a+b):(c+d)$ оба выговариваются $a+b$ раздѣлены на $c+d$.

283.

Когда составную формулу должно будетъ дѣлить на простую, то дѣлится каждой членъ особенно такимъ образомъ:

$6a-8b+4c$ раздѣленные на 2, даютъ $3a-4b+2c$; и $(aa-2ab):a=a-2b$. та-

кимЪ же образомЪ $(a^3-2aab+3abb):a=aa-2ab+3bb$, также $(4aab-6aac+8abc):(2a)=2ab-3ac+4bc$, и $(9aabc-12abbc+15abcc):(3abc)=3a-4b+5c$. И такЪ далѣе.

284.

Ежели членЪ дѣлимаго раздѣлиться не можетЪ, то произшедшее оттуда частное число изъявляется дробью; такЪ когда $a+b$ на a раздѣлить должно, то получится частное $1+\frac{b}{a}$ такожде $(aa-ab+bb):aa=1-\frac{b}{a}+\frac{bb}{aa}$, еще же когда $(2a+b)$ на 2 дѣлить должно, то получится $a+\frac{b}{2}$, при чемЪ примѣчать надлежитЪ, что вмѣсто $\frac{b}{2}$ можно писать $\frac{1}{2}b$, ибо $\frac{1}{2}b$ столь же велика какЪ и $\frac{b}{2}$: подобнымЪ образомЪ $\frac{b}{3}$ тоже, что $\frac{1}{3}b$, и $\frac{2b}{3}$ тоже, что и $\frac{2}{3}b$ и такЪ далѣе.

285.

Естьли же дѣлитель самЪ состоять будетЪ изЪ многихЪ членовЪ, тогда при дѣленіи больше трудности бываетЪ, ибо оное часто дѣйствительно учиниться

можетЪ

можетъ, хотя того и не видно; а когда дѣленïе на цѣло не выходитъ, то должно довольствоваться и тѣмъ, когда частное число, какъ выше упомянуто, подъ видомъ дроби изобразимъ. Разсмотримъ здѣсь одни только тѣ случаи гдѣ дѣленïе дѣйствительно здѣлаться можетъ.

286.

Пусть дѣлимое $ac-bc$ на дѣлителя $a-b$ раздѣлить должно; то частное оттуда произшедшее такого свойства быть должно, что ежели оное на дѣлителя $a-b$ помножится, выдетъ дѣлимое $ac-bc$; теперь легко видѣть можно, что въ частномъ долженствуетъ быть c, потому что иначе не вышло бы ac, а чтобы узнать, будетъ ли c совершенное частное число, то помножь онымъ дѣлителя, и смотри все ли дѣлимое число вышло или только часть онаго. Въ нашемъ примѣрѣ когда $a-b$ помножится на c, то получится $ac-bc$, что есть самое дѣлимое, слѣдовательно c есть совершенное частное число. Равнымъ образомъ

явствуетъ, что $(aa+ab):(a+b)=a$, $(3aa-2ab):(3a-2b)=a$, такожде $(6aa\ \ \ ab):(2a-3b)=3a$.

287.

Такимъ образомъ заподлинно найдется одна часть частнаго, и ежели оная помножится на дѣлителя, а отъ дѣлимаго еще нѣчто останется, то остальное должно еще дѣлить на дѣлителя, и тогда другая частнаго числа часть найдется; подобнымъ образомъ до тѣхъ поръ продолжать надлежитъ, пока все частное число не получится.

Раздѣлимъ наприм. $aa+3ab+2bb$ на $a+b$, то заразъ видно, что частное должно въ себѣ содержать членъ a; ибо иначе не вышло бы aa; но помноживъ дѣлителя $a+b$ на a выдетъ $aa+ab$, которое когда изъ дѣлимаго вычтется, останется еще $2ab+2bb$, что еще на $a+b$ дѣлить должно гдѣ заразъ видно,

что въ частномъ $2b$ стоять должны, помноживъ теперь $2b$ на $a+b$ выходитъ точно $2ab+2bb$ слѣдовательно искомое частное есть $a+2b$, которое будучи помножено на дѣлителя $a+b$ даетъ дѣлимое. Все сіе дѣйствіе представляется такимъ образомъ.

$$
\begin{array}{r|l|l}
a+b & aa+3ab+2bb & a+2b \\
 & \underline{aa+ab} & \\
 & +2ab+2bb & \\
 & \underline{+2ab+2bb} &
\end{array}
$$

288.

Для облегченія сего дѣйствія берется часть дѣлителя, какъ здѣсь a, которая и пишется съ начала, а позади сихъ буквъ пишется дѣлимое такимъ порядкомъ, что вышшіе степени сей же буквы a ставится съ начала, какъ изъ слѣдующаго примѣра видѣть можно.

$$
\begin{array}{r|l|l}
a-b & a^3-3aab+3abb-b^3 & aa-2ab+bb \\
 & \underline{a^3-aab} &
\end{array}
$$

 $-2aab$

$$-2aab+3abb$$
$$-2aab+2abb$$
$$+abb-b^3$$
$$+abb-b^3$$

$$a+b)\ aa-bb\ (a-b$$
$$aa+ab$$
$$-ab-bb$$
$$-ab-bb$$

$$3a-2b)\ 18aa-8bb\ (6a+4b$$
$$18aa-12ab$$
$$+12ab-8bb$$
$$+12ab-8bb$$

$$a+b)\ a^3+b^3\ (aa-ab+bb$$
$$a^3+aab$$
$$-aab+b^3$$
$$-aab-abb$$
$$+abb+b^3$$
$$+abb+b^3$$

$$2a-b)\ 8a^3-b^3\ (4aa+2ab+bb$$
$$8a^3-4aab$$
$$+4aab-b^3$$

+4

$$+4aab-2abb$$

$$+2abb-b^3$$
$$+2abb-b^3$$

$$aa-2ab+bb)\,a^4-4a^3b+6aabb-4ab^3+b^4\,(aa-2ab+bb$$
$$a^4-2a^3b+aabb$$
$$-2a^3b+5aabb-4ab^3$$
$$-2a^3b+4aabb-2ab^3$$
$$+aabb-2ab^3+b^4$$
$$+aabb-2ab^3+b^4$$

$$aa-2ab+4bb)\,a^4+4aabb+16b^4\,(aa+2ab+4bb$$
$$a^4-2a^3b+4aabb$$
$$+2a^3b+16b^4$$
$$+2a^3b^2-4aabb+8ab^3$$
$$+4aabb-8ab^3+16b^4$$
$$+4aabb-8ab^3+16b^4$$

$$aa-2ab+2bb)\,a^4+4b^4\,(aa+2ab+2bb$$
$$a^4-2a^3b+2aabb$$

$+2a$

$$+2a^3b-2aabb+4b^4$$
$$+2a^3b-4aabb+4ab^3$$
$$+2aabb-4ab^3+4b^4$$
$$+2aabb-4ab^3+4b^4$$

$$1-2x+xx)\,1-5x+10xx-10x^3+5x^4-x^5\,(\,1-3x+3xx-x$$
$$1-2x+xx$$
$$-3x+9xx-10x^3$$
$$-3x+6xx-3x^3$$
$$+3xx-7x^3+5x^4$$
$$+3xx-6x^3+3x^4$$
$$-x^3+2x^4-x^5$$
$$-x^3+2x^4-x^5$$

ГЛАВА V.

О разрѣшеніи дробей на безконечные ряды.

289.

Когда дѣлимое на дѣлителя раздѣлиться не можетъ, то изъявляется частное число

число дробью, какЪ уже упомянуто. ТакЪ, когда 1 цу на $1-a$ раздѣлить должно, то получится сїя дробь $\frac{1}{1-a}$; между тѣмЪ однакожЪ дѣленїе по прежнимЪ правиламЪ дѣлается, и продолжается по изволенїю, и тогда подлинное частное число, хотя вЪ разныхЪ формулахЪ, выходить долженствуетЪ.

290.

А что бы показать, то раздѣлимЪ дѣйствительно дѣлимое 1 цу на дѣлителя $1-a$, какЪ слѣдуетЪ.

$1-a)1\ (1+\frac{a}{1-a}$ или $1-a)1\ (1+a+\frac{aa}{1-a}$

$1\ a$ $\qquad\qquad$ $1-a$

остат: $+a$ $\qquad\qquad$ $+a$

$+a-aa$

остатокЪ $+aa$

Для сыканїя большаго числа формулЪ раздѣлимЪ aa на $1-a$, какЪ.

$$1-a)aa\ (aa+\frac{a^3}{1-a}$$

$$aa-a^3$$

$$+a^3$$

$1-a)$

$1-a) a^3 \left(a^3 + \frac{a^4}{1-a} \right.$ еще $1-a) a^4 \left(a^4 + \frac{a^5}{1-a} \right.$

$a^3 - 4^4$ $\qquad\qquad$ $a^4 - a^5$

$+a^4$ $\qquad\qquad$ $+a^5$ и протч.

291.

Отсюда видимъ мы, что дробь $\frac{1}{1-a}$ чрезъ всѣ слѣдующіе формулы изъявлена быть можетъ I) $1+\frac{a}{1-a}$; II) $1+a+\frac{a^2}{1-a}$; III) $1+a+aa+\frac{a^3}{1-a}$; IV) $1+a+aa+a^3+\frac{a^4}{1-a}$; V) $1+a+aa+a^3+a^4+\frac{a^5}{1-a}$ и протч. возми въ рассужденіе I формулу $1+\frac{a}{1-a}$, понеже 1 столь же велика какъ $\frac{1-a}{1-a}$, слѣдовательно $1+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a}{1-a}+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a+a}{1-a}=\frac{1}{1-a}$, во второй формулѣ $1+a+\frac{aa}{1-a}$ приведи цѣлую часть къ тому же знаменателю $1-a$, то получится $\frac{1-aa}{1-a}$ придай къ сему $\frac{+aa}{1-a}$ будетъ $\frac{1-aa+aa}{1-a}$ т. е. $\frac{1}{1-a}$.

Для третей формулы $1+a+aa+\frac{a^3}{1-a}$, когда цѣлая часть къ тому же знаменателю $1-a$ приведена будетъ, дастъ $\frac{1-a^3}{1-a}$, къ ней придай дробь $\frac{a^3}{1-a}$ сумма будетъ $\frac{1}{1-a}$ откуда явствуетъ, что

что всѣ сiи формулы въ самомъ дѣлѣ тоже значатъ, что и данная дробь $\frac{1}{1-a}$

292.

Такимъ образомъ сiе дѣйствiе столь далеко продолжать можно, какъ за благо разсудится, не имѣя нужды дальное дѣлать исчисленiе, такъ будетъ $\frac{1}{1-a}=1+a+aa+a^3+a^4+a^5+a^6+a^7+\frac{a^8}{1-a}$ да и еще далѣе дѣйствiе сiе продолжать можно никогда не преставая, чрезъ что предложенная дробь $\frac{1}{1-a}$ обратится въ безконечной рядъ какъ $1+a+aa+a^3+a^4+a^5+a^6+a^7+a^8+a^9+a^{10}+a^{11}+a^{12}$ и прот. безконечно, и о семъ безконечномъ ряду съ достовѣрностiю утверждать можно, что онъ столь же великъ какъ и дробь $\frac{1}{1-a}$.

293.

Хотя сiе съ начала и весьма удивительно кажется, однакожъ разсмотрѣвъ нѣкоторые случаи, будетъ вразумительно; положимъ сперьва $a=1$, то выдетъ нашъ рядъ$=1+1+1+1+1+1+1+1+1$

и протч безконечно, которой дроби $\frac{1}{1-1}$ т. е. $\frac{1}{0}$ равенЪ быть долженствуетЪ. Но мы уже видѢли что $\frac{1}{0}$ есть безконечно большое число, что и симЪ также подтверждается.

Когда же возмется $a=2$, то будетЪ нашЪ рядЪ $=1+2+4+8+16+32+64$ и протч. безконечно, которой доложенЪ быть равенЪ $\frac{1}{1-2}$ т. е. $\frac{1}{-1}=-1$, что не сходнымЪ быть кажется.

Но надлежитЪ примѢчать, что ежели вЪ вышепоказанномЪ ряду остановиться пожелаешь, то завсегда прибавлять еще должно дробь. ТакЪ когда у 64 остановимся, то кЪ $1+2+4+8+16+32+64$ еще сію дробь $\frac{128}{1-2}$ т. е. $\frac{128}{-1}=-128$ приставить надлежитЪ; по чему выдетЪ 127-128 т. е. -1.

294.

Сіе примѢчать должно когда вмѢсто a, берутся числа больше единицы; а естьли вмѢсто a возмутся меньшія числа, то

то все легко уразумѣть можно. Пусть будетъ наприм. $a=\frac{1}{2}$, то получится $\frac{1}{1-a}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$, которые слѣдующему ряду равны будутъ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}$ и протч. безконечно Когда теперь возмутся только два члена $1+\frac{1}{2}$, то не достаетъ $\frac{1}{2}$, когда же возмутся 3, то будетъ $1\frac{3}{4}$, и не достаетъ $\frac{1}{4}$; 4 члена взятые вмѣстѣ дѣлаютъ $1\frac{7}{8}$, и не достаетъ еще $\frac{1}{8}$; откуда видно, что завсегда недостатокъ меньше становится, слѣдовательно ежели рядъ безконечно продолжится, то совсѣмъ никакого недостатка не будетъ.

295.

Положи $a=\frac{1}{3}$, то будетъ наша дробь $\frac{1}{1-a}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$, которой слѣдующей рядъ равенъ будетъ $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}$ и протч. безконечно. Возми 2 члена и выдетъ $1\frac{1}{3}$, и по сему не достаетъ $\frac{1}{6}$; возми 3 будетъ $1\frac{4}{9}$, не достаетъ $\frac{1}{18}$; возми 4 члена, выдетъ $1\frac{13}{27}$, и не достаетъ еще $\frac{1}{54}$; когда теперь погрѣшность въ три

раза часъ отъ часу меньше становится, что оная наконецъ уничтожится.

296.

Положимъ $a=\frac{2}{3}$ то будетъ дробь $\frac{1}{1-\frac{2}{3}}$ $=3$, а рядъ будетъ $=1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}+\frac{32}{243}$ и протч. безконечно; взявъ сперьва $1\frac{2}{3}$ не достанетъ еще $1\frac{1}{3}$, взявъ 3 члена будетъ $2\frac{1}{9}$, и не достанетъ еще $\frac{8}{9}$; возми 4 члена будетъ $2\frac{11}{27}$, не достаетъ еще $\frac{16}{27}$.

297.

Пусть будетъ $a=\frac{1}{4}$, то будетъ дробь $\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=1\frac{1}{3}$; а рядъ будетъ $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$ $+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}$ и протч. возми 2 члена, будетъ $1\frac{1}{4}$, слѣд: не достаетъ $\frac{1}{12}$, возми 3, выдетъ $1\frac{5}{16}$, и не достаетъ еще $\frac{1}{48}$ и протч.

298.

Равнымъ образомъ и сїя дробь $\frac{1}{1+a}$ въ безконечной рядъ обратится, когда числитель 1 на знаменателя $1+a$ дѣйствительно раздѣлится, какъ слѣдуетъ.

$$
\begin{array}{l}
1+a\,)\;1\;(\;1-a+aa-a^3+a^4 \\
\quad\;\; \underline{1+a} \\
\qquad -a \\
\qquad \underline{-a-aa} \\
\qquad\quad +aa \\
\qquad\quad \underline{aa+a^3} \\
\qquad\qquad -a^3 \\
\qquad\qquad \underline{-a^3-a^4} \\
\qquad\qquad\quad +a^4 \\
\qquad\qquad\quad \underline{+a^4+a^5} \\
\qquad\qquad\qquad -a^5 \text{ и протч.}
\end{array}
$$

По сему наша дробь $\frac{1}{1+a}$ равна сему безконечному ряду $1-a+aa-a^3+a^4-a^5+a^6-a^7$ и протч.

299.

Положи $a=1$, то получится сїе примѣчанїя достойное уравненїе $\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}=1-1+1-1+1-1+1-1$ и протч. безконечно, что противорѣчить кажется; ибо когда рядъ на -1 кончится, то даетъ онъ 0, а ежели на $+1$ перервется, то

даетъ 1. Но сіе оттуда понять можно, когда безконечно продолжать будешь не останавливаяся нипри -1 ниже при $+1$, то тогда сумма ни 1 ни 0, но среднее между ими выдетъ $\frac{1}{2}$.

300.

Пусть будетъ $a=\frac{1}{2}$, то наша дробь $\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$ равна будетъ сему ряду $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$ и протч. безконечно. Возми два члена, то выдетъ $\frac{1}{2}$ которая $\frac{1}{6}$ частью меньше, взявъ 3 члена получишь $\frac{3}{4}$ коя больше $\frac{1}{12}$ частью, взявъ 4 получится $\frac{5}{8}$ что меньше $\frac{1}{24}$ частицею и протч.

301.

Положивъ $a=\frac{1}{3}$ будетъ наша дробь $\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$ коей слѣдующей рядъ равенъ $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}-\frac{1}{243}+\frac{1}{729}$ и протч. безконечно; возми 2 члена получишь $\frac{2}{3}$, кои меньше $\frac{1}{12}$ю, и взявъ 3 члена выдетъ $\frac{7}{9}$, кои больше $\frac{1}{36}$ю; взявъ 4 члена получится $\frac{20}{27}$, кои меньше $\frac{1}{108}$ частью и протч.

302.

Дробь $\frac{1}{1+a}$ можно еще инымЪ образомЪ разрѣшить; а имянно когда 1 на $a+1$ раздѣлится такимЪ образомЪ.

$$
\begin{array}{l}
a+1\ \Big\}\ 1\ \Big\{\ \frac{1}{a}-\frac{1}{aa}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^6} \\
\qquad 1+\frac{1}{a} \\
\qquad \overline{-\frac{1}{a}} \\
\qquad -\frac{1}{a}-\frac{1}{aa} \\
\qquad \overline{+\frac{1}{aa}} \\
\qquad\qquad +\frac{1}{aa}+\frac{1}{a^3} \\
\qquad\qquad \overline{-\frac{1}{a^3}} \\
\qquad\qquad\qquad -\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4} \\
\qquad\qquad\qquad \overline{+\frac{1}{a^4}} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad +\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^6} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \overline{-\frac{1}{a^6}} \text{ и протч.}
\end{array}
$$

И такЪ наша дробь $\frac{1}{a+1}$ равна слѣдующему ряду, $\frac{1}{a}-\frac{1}{aa}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}-\frac{1}{a^6}$ и протч. безконечно. ПоложивЪ $a=1$ получится сей рядЪ $\frac{1}{2}=1-1+1-1+1-1$ и протч. какЪ и прежде,

Положивъ $a=2$ получится сей рядъ
$\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}$ и прочч.

303.

Равнымъ образомъ можно сїю дробь $\frac{c}{a+b}$ вообще обратить въ слѣдующей рядъ, такимъ образомъ.

$$a+b \,\}\, c \,\{\, \frac{c}{a}-\frac{bc}{aa}+\frac{bbc}{a^3}$$

$$c+\frac{bc}{a}$$

$$-\frac{bc}{a}$$

$$-\frac{bc}{a}-\frac{bbc}{aa}$$

$$+\frac{bbc}{aa}$$

$$+\frac{bbc}{aa}+\frac{b^3c}{a^3}$$

$$-\frac{b^3c}{a^3} \text{ и прочч.}$$

Откуда получаемъ мы уравненїе въ слѣдующемъ ряду $\frac{c}{a+b}=\frac{c}{a}-\frac{bc}{aa}+\frac{bbc}{a^3}-\frac{b^3c}{a^4}$ и прочч. безконечно. Пусть будетъ $a=2$, $b=4$ и $c=3$, то получится $\frac{c}{a+b}=\frac{3}{4+2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-3+6-12$ и прочч. пусть $a=10$,

$b=1$ и $c=11$, то получимъ $\frac{c}{a+b}=\frac{11}{10+1}=1$ $=\frac{11}{10}-\frac{11}{100}+\frac{11}{1000}-\frac{11}{10000}$ и протч. взявъ одинъ членъ будетъ $\frac{11}{10}$, больше $\frac{1}{10}$ частью, взявъ 2 члена выдетъ $\frac{99}{100}$, кои меньше $\frac{1}{100}$ю, взявъ 3 члена получится $\frac{1001}{1000}$ кои больше $\frac{1}{1000}$ частью и протч.

304.

Когда дѣлитель изъ многихъ частей состоитъ, то равнымъ образомъ дѣленіе продолжается безконечно. Такъ ежелибы сія дробь $\frac{1}{1-a+aa}$ была предложена, то безконечной рядъ ей равной находится такимъ образомъ.

$$
\begin{array}{l}
1-a+aa\ \big\}\ 1 \quad)\ 1+a-a^3-a^4+a^6+a^7 \text{ и прот.} \\
\qquad\qquad\quad \underline{1-a+aa} \\
\qquad\qquad\quad +a-aa \\
\qquad\qquad\quad \underline{+a-aa+a^3} \\
\qquad\qquad\qquad\quad -a^3 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-a^3+a^4-a^5} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -a^4+a^5 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-a^4+a^5-a^6} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +a^6
\end{array}
$$

$$\begin{array}{l} +a^6 - a^7 + a^8 \\ \hline +a^7 - a^8 \\ +a^7 - a^8 + a^9 \\ \hline \qquad\qquad -a^9 \end{array}$$

и протч.

И такъ имѣемъ мы сїе уравненїе $\frac{1}{1-a+aa} = 1 + \alpha - \alpha^3 - \alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^7 - \alpha^9 - \alpha^{10}$ и протчая безконечно. Возми здѣсь $\alpha = 1$, то получится такой рядъ $1 = 1 + 1 - 1 - 1 + 1$, $+ 1 - 1 - 1 + 1 + 1$ и протч., которой рядъ содержитъ въ себѣ прежней $1 - 1 + 1 - 1 + 1$ и протч. дважды; но прежней рядъ былъ равенъ $\frac{1}{2}$, то не удивительно, что сей $= 2.\frac{1}{2}$ т. е. 1 цу составляетъ.

Положивъ $\alpha = \frac{1}{2}$, получится сїе уравненїе $\frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} - \frac{1}{512}$ и протч. положивъ $\alpha = \frac{1}{3}$ получится такое уравненїе $\frac{1}{\frac{3}{4}}$ или $1 : \frac{7}{9} = \frac{9}{7} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{729}$ и протч. возми здѣсь 4 члена, то получишь $\frac{104}{81}$ которая меньше $\frac{1}{567}$ ю, нежели $\frac{9}{7}$; положивъ еще $\alpha = \frac{2}{3}$ получится сїе уравне-

нїе

нїе $\frac{1}{\frac{7}{9}} = \frac{9}{7} = 1 + \frac{2}{3} - \frac{8}{27} - \frac{18}{81} + \frac{84}{729}$ и протч, которой рядъ прежнему равенъ, чего ради и такъ вычти верхней изъ сего, то получится $0 = \frac{1}{3} - \frac{7}{27} - \frac{15}{81} + \frac{63}{729}$ и протч. гдѣ 4 члена вмѣстѣ дѣлаютъ $-\frac{[illegible]}{81}$.

305.

Такимъ образомъ можно всѣ дроби обращать въ безконечные ряды, что не только великую пользу часто приноситъ, но и само по себѣ очень достопамятно: ибо безконечной рядъ не смотря на то, что никогда не пресѣчется, но еще и опредѣленное знаменованїе имѣть можетъ. Изъ сего основанїя выведены наиважнѣйшїе изобрѣтенїя, чего ради сїя матерїя заслуживаетъ быть разсмотрена съ наиболышимъ вниманїемъ.

ГЛАВА VI.

О квадратахъ составныхъ количествъ.

306.

Когда понадобится найти квадратъ составнаго количества, то надлежитъ

оное только само собою помножить, произведеніе будетъ квадратъ онаго.

Такимъ образомъ находится квадратъ изъ $a+b$, какъ слѣдуетъ.

$$\begin{array}{l} a+b \\ a+b \\ \hline aa+ab \\ \quad +ab+bb \\ \hline aa+2ab+bb \end{array}$$

307.

И по сему ежели корень состоитъ изъ двухъ частей, кои сложены вмѣстѣ какъ $a+b$, то слагается квадратъ 1 изъ квадратовъ каждой части т. е. aa и bb; 2, присовокупляется еще къ сему двойное произведеніе обѣихъ частей, а имянно $2ab$, и цѣлая сумма $aa+2ab+bb$ есть квадратъ изъ $a+b$.

Пусть будетъ наприм. $a=10$, $b=3$, такъ что квадратъ 13 ти найти должно, то будетъ оной $=100+9+60=169$.

308.

Помощїю сея формулы легко можно находить квадраты нарочито большихъ чиселъ, когда оныя на двѣ части раздроблены будутъ.

Такъ для нахожденїя квадрата изъ 57, раздроби сїе число на $50+7$, квадратъ его будетъ $=2500+700+49=3249$.

309.

Отсюда видно, что квадратъ изъ $a+1$ будетъ $aa+2a+1$; когда же квадратъ изъ a есть aa, то квадратъ изъ $a+1$ найдется, ежели къ оному придастся $2a+1$; при чемъ надлежитъ примѣчать, что $2a+1$ есть сумма обоихъ корней a и $a+1$. И такъ когда квадратъ 10 ти есть 100, то квадратъ 11 ти будетъ $=100+21$, и когда квадратъ 57 ми есть 3249, то будетъ квадратъ 58 ми $=3249+115=3364$, а квадратъ 59 ти $=3364+117=3481$, и наконецъ квадратъ 60 ти $=3481+119=3600$ и протч.

310.

310.

Квадратъ изъ составнаго количества какъ $a+b$ означается такъ $(a+b)^2$ и по сему будетъ $(a+b)^2 = aa+2ab+bb$ откуда производятся слѣдующія уравненія:

$(a+1)^2 = aa+2a+1$, $(a+2)^2 = aa+4a+4$, $(a+3)^2 = aa+6a+9$; $(a+4)^2 = aa+8a+16$ и такъ далѣе.

311.

Ежели корень будетъ $a-b$, то получится онаго квадратъ $aa-2ab+bb$, которой состоитъ изъ квадратовъ обѣихъ частей, изъ суммы коихъ двойное произведеніе вычтено.

Пусть на прим. $a=10$, $b=1$, то будетъ квадратъ 9 ти $=100-20+1=81$.

312.

Имѣя сіе уравненіе $(a-b)^2 = aa-2ab+bb$, будетъ $(a-1)^2 = aa-2a+1$, что найдется, ежели изъ aa вычтется $2a-1$, а сіе есть сумма корней a и $a-1 = 2a-1$.

Пусть

Пусть на прим. $a=50$, будетъ $aa=2500$, $a-1=49$, и такъ $49^2=2500-99=2401$.

313.

Сïе дробями изъяснить также можно; ибо когда возмется за корень $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}$ [которые составляютъ 1цу], то выдетъ квадратъ $=\frac{9}{25}+\frac{4}{25}+\frac{12}{25}=\frac{25}{25}=1$; квадратъ изъ $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}[=\frac{1}{6}]$ будетъ $\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{1}{36}$.

314.

Когда корень изъ многихъ членовъ состоитъ, то можно равнымъ образомъ опредѣлить ево квадратъ, такъ изъ $a+b+c$ найдется квадратъ какъ слѣдуетъ.

$$\begin{array}{l} a+b+c \\ a+b+c \\ \hline aa+ab+ac \qquad +bc \\ \qquad +ab+ac+bb+bc+cc \\ \hline aa+2ab+2ac+bb+2bc+cc \end{array}$$

Откуда явствуетъ, что оной состоитъ вопервыхъ изъ квадратовъ каждой

части

части корня, и изЪ удвоенныхЪ произведенiй каждыхЪ двухЪ частей между собою.

315.

А чтобы сie изЪяснить примѣромЪ, то раздѣлимЪ число 256 на 3 части 200 + 50 + 6, по чему квадратЪ его изЪ слѣдующихЪ частей составленЪ.

40000	которой равенЪ	сему произведенiю	256
2500			256
36			1536
20000			1280
2400			512
600			
65536			65536

316.

Когда нѣкоторые члены вЪ корнѣ будутЪ отрицательные, то по сему же правилу найдется его квадратЪ, когда только на двойныя произведенiя смотрѣть будешь, какой каждому знакЪ принадлежитЪ. ТакЪ изЪ $a-b-c$ будетЪ квадратЪ

aa

$aa+bb+cc-2ab-2ac+2bc$; слѣдовательно когда число 256 представится такимъ образомъ $300-40-4$, то будетъ.

$$\begin{array}{r} +90000 \\ 1600 \\ 320 \\ 16 \\ \hline +91936 \\ -26400 \\ \hline +65536. \end{array} \qquad \begin{array}{r} -24000 \\ -2400 \\ \hline -26400 \end{array}$$

ГЛАВА. VII

О извлеченіи квадратныхъ корней въ составныхъ количествахъ.

317.

Дабы сему дать здѣсь надежное правило, то надлежитъ намъ взять въ подробное разсужденіе квадратъ изъ корня $a+b$, которой есть $aa+2ab+bb$, и искать, какимъ образомъ изъ даннаго квадрата корень вывесть можно: къ чему слѣдующія разсужденія потребны.

318.

318.

Воперьвыхъ ежели квадратъ $aa + 2ab + bb$ изъ многихъ членовъ состоитъ, то за подлинно извѣстно, что корень имѣть долженъ больше нежели одинъ членъ, и естьли квадратъ написанъ будетъ такъ, что степени одной буквы какъ a за всегда умаляются, то явно, что первой членъ будетъ квадратъ изъ перьваго члена корня, какъ въ нашемъ теперь примѣрѣ первой членъ есть квадратъ aa то явствуетъ, что первой корня членъ долженъ быть a.

319.

Когда первой членъ корня т. е. a найденъ, то разсматривай остальные въ квадратѣ знаки, кои суть $2ab + bb$ дабы увидѣть, какимъ бы образомъ оттуда вторую корня часть, которая есть b найти можно было. Здѣсь примѣчаемъ мы, что остатокъ $2ab + bb$ представленъ быть можетъ чрезъ произведеніе $2a + b$ b и когда сей остатокъ имѣетъ два мно-

жителя

жителя $2a+b$ и b, то послѣдней b найдется, ежели остатокЪ $2ab+bb$ на $2a+b$ раздѣлится.

320.

И такЪ для нахожденія второй корня части должно остатокЪ на $2a+b$ раздѣлить, и частное будетЪ вторая корня часть. ВЪ семЪ дѣленіи надлежитЪ примѣчать, что $2a$ есть удвоенная найденная уже первая корня часть a, а другой членЪ b хотя и не извѣстенЪ, и его мѣсто порожнее должно оставить; но понеже дѣленіе сдѣлать также можно, ежели только на первой членЪ a смотрѣть будемЪ, а какЪ скоро частное найдется, которое здѣсь есть b, то оное на порожнее мѣсто должно поставить и дѣленіе совершать.

321.

Изчисленіе, вЪ которомЪ изЪ прежде показаннаго квадрата $aa+2ab+bb$ корень находится, производится такимЪ образомЪ.

$$\begin{array}{l|l}
aa+2ab+bb & a+b \\
aa & \\
\hline
2a+b)\ 2ab+bb & \\
\quad 2ab+bb & \\
\hline
\end{array}$$

322.

Такимъ образомъ можно извлекать квадратной корень и изъ другихъ составныхъ формулъ, ежели оные будутъ только квадраты, какъ изъ слѣдующихъ примѣровъ видно:

$$\begin{array}{l|l}
aa+6ab+9bb & a+3b \\
aa & \\
\hline
2a+3b)\ +0ab+9bb & \\
\quad 6ab+9bb & \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
4aa-4ab+bb & 2a-b \\
4aa & \\
\hline
4a-b)\ -4ab+bb & \\
\quad -4ab+bb & \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
9pp+24pq+16qq & 3p+4q \\
9pp & \\
\hline
6p+4q)\ +24pq+16qq & \\
\quad +24pq+16qq & \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
25xx-60x+36 & 5x-6 \\
25xx & \\
\hline
\end{array}$$

$$10x-6)-60x+36$$
$$-60x+36$$

323.

Ежели послѣ дѣленія останется еще остатокъ, то значитъ сіе, что корень состоитъ больше нежели изъ двухъ членовъ, и тогда два найденные уже члена вмѣстѣ за первую часть почитаются, и изъ остатка равнымъ образомъ, какъ и прежде, слѣдующей корня членъ находится, какъ изъ слѣдующихъ примѣровъ явствуетъ:

$$aa+2ab-2ac-2bc+bb+cc \left\{ a+b-c \right.$$
$$aa$$

$$2a+b)+2ab-2ac-2bc+bb+cc$$
$$+2ab \quad +bb$$

$$2a+2b-c)-2ac-2bc+cc$$
$$-2ac-2bc+cc$$

$$a^4+2a^3+3aa+2a+1 \left\{ aa+a+1 \right.$$
$$a^4$$

$$2aa+a)\ 2a^3+3aa$$
$$2a^3+aa$$

$$2aa+2a+1)+2aa+2a+1$$
$$+2aa+2a+1$$

$$a^4-4a^3b+8ab^3+4b^4 \left\{ aa-2ab-2bb \right.$$
$$a^4$$

$$2aa-2ab)-4a^3b+8ab^3$$
$$-4a^3b+4aabb$$

$$2aa-4ab-2bb)-4aabb+8ab^3+4b^4$$
$$-4aabb+8ab^3+4b^4$$

$$a^6-6a^5b+15a^4bb-20a^3b^3+15aab^4-6ab^5+b^6 \left\{ a^3 \right.$$
$$a^6 \qquad -3aab+3abb-b^3$$

$$2a^3-3a^2b)-6a^5b+15a^4bb$$
$$-6a^5b+9a^4bb$$

$$2a^3-6a^2b+3abb)+6a^4bb-20a^3b^3+15aab^4$$
$$+6a^4bb-18a^3b^3+9aab^4$$

$$2a^3-6aab+6abb-b^3)-2a^3b^3+6aab^4-6ab^5+b$$
$$-2a^3b^3+6aab^4-6ab^5+b^6$$

324.

Изъ сего правила слѣдуетъ теперь и то, которое въ ариѳметическихъ книгахъ для извлеченія квадратнаго корня преподается, какъ:

```
 5|29 {23,        17|64 {42;        23|04 {48;
 4|                16|               16|
43)129            82)164            88)704
   129                164               704

        40|96 {64             9|604 {98;
        36|                   8|1
      124)496               188)1504
           496                  1504

   1|56|25 {125            99|80|01 {999,
   1|                      81|
  22) 56                 189)1880
      44                     1701
 245) 1225              1989)17901
      1225                   17901
```

325.

Ежели при концѣ случится остатокъ, то значитъ сїе, что предложенное число не квадратъ; слѣд: корня его изъявить не льзя. Въ такомъ случаѣ употребляется преждереченной коренной знакъ, которой попереди формулы ста-

вится, а самая формула включается въ скобки. И такъ корень изъ $aa+bb$ означается чрезъ $\sqrt{}(aa+bb)$, а $\sqrt{}(1-xx)$ показываетъ квадратной корень изъ $1-xx$. На мѣсто сего кореннаго знака можно употреблять ломаной показатель $\frac{1}{2}$; такимъ образомъ $(aa+bb)^{\frac{1}{2}}$ будетъ такожде означать квадратной корень изъ $aa+bb$.

ГЛАВА VIII.

О вычисленіи неизвлекомыхъ чиселъ.

326.

Естьли двѣ или больше неизвлекомые формулы должно будетъ сложить въ одну сумму, то чинится сіе, какъ выше показано, ставя всѣ члены вмѣстѣ съ ихъ знаками; при сокращеніи ихъ только примѣчать надлежитъ, что вмѣсто $\sqrt{}a+\sqrt{}a$ пишется $2\sqrt{}a$, и что $\sqrt{}a-\sqrt{}a$ другъ друга уничтожаютъ, или дѣлаютъ ничево. Слѣдовательно формулы $3+\sqrt{}2$ и $1+\sqrt{}2$ сложенные вмѣстѣ

даютъ

даютъ $4+2\sqrt{2}$ или $4+\sqrt{8}$; также $5+\sqrt{3}$ и $4-\sqrt{3}$ сложенныя вмѣстѣ дѣлаютъ 9; $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ составляютъ въ суммѣ $3\sqrt{3}+2\sqrt{2}$.

327.

Вычитанïе не имѣетъ также ни малой трудности: ибо въ немъ перемѣняются только знаки нижняго числа, которое вычитать должно въ противные, какъ изъ слѣдующаго примѣра видно. Изъ $4-\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{5}+4\sqrt{6}$ вычесть долж.

$$\frac{1+2\sqrt{2}-3\sqrt{3}-5\sqrt{5}+6\sqrt{6}}{3-3\sqrt{2}+5\sqrt{3}+2\sqrt{5}-2\sqrt{6}}$$

328.

При умноженïи примѣчать должно только, что $\sqrt{a}$ умноженной на $\sqrt{a}$ даетъ a; естьли же подъ знакомъ $\sqrt{}$ будутъ стоять не одинакïе числа какъ $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$, то они въ произведенïи дадутъ $\sqrt{ab}$; по чему слѣдующïе примѣры вычислены быть могутъ, какъ:

$$\begin{array}{r} 1+\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \\ \hline \sqrt{2}+2 \\ 1+\sqrt{2} \\ \hline 1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4+2\sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} \\ \hline 8+4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2}-4 \\ \hline 8-4=4 \end{array}$$

329.

Сїе же самое имѣетъ мѣсто и при невозможныхъ количествахъ какъ, $\sqrt{-a}$; при чемъ примѣчается, что $\sqrt{-a}$ умноженной на $\sqrt{-a}$ въ произведенїи даетъ $-a$. Естьлибъ должно было искать кубъ числа $-1+\sqrt{-3}$, то учинится сїе, когда даннаго числа квадратъ умножится на то же данное число $-1+\sqrt{-3}$ какъ.

$$\begin{array}{r} -1+\sqrt{-3} \\ -1+\sqrt{-3} \\ \hline +1-\sqrt{-3} \\ -\sqrt{-3}-3 \\ \hline 1-2\sqrt{-3}-3=-2-2\sqrt{-3} \end{array} \qquad \begin{array}{r} -2-2\sqrt{-3} \\ -1+\sqrt{-3} \\ \hline +2+2\sqrt{-3} \\ -2\sqrt{-3}-2(-3) \\ \hline 2+6=8 \end{array}$$

330.

330.

При дѣленїи поставь только просто дробь, которую потомъ можно превратить въ другую формулу, такъ что знаменатель будетъ рацїональной (numerus rationalis); ибо когда знаменатель будетъ $a+\sqrt{b}$ и дробь съ верху и съ низу помножится на $a-\sqrt{b}$, то знаменатель произойдетъ $aa-b$, которой уже кореннаго знака не имѣетъ, напр: раздѣли $3+2\sqrt{2}$ на $1+\sqrt{2}$, то будетъ $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$, помножь теперь съ верху и съ низу на $1-\sqrt{2}$ то получится на мѣсто числителя а мѣсто знаменателя.

$$\begin{array}{l} 3+2\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \\ \hline 3+2\sqrt{2} \\ \quad -3\sqrt{2}-2.2 \\ \hline 3-\sqrt{2}-4=-\sqrt{2}-1; \end{array} \qquad \begin{array}{l} 1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \\ \hline 1+\sqrt{2} \\ \quad -\sqrt{2}-2 \\ \hline 1-2=-1 \end{array}$$

Слѣдовательно новая дробь будетъ $\frac{-\sqrt{2}-1}{-1}$; помножь еще въ верху и въ низу на -1 и получится числитель $+\sqrt{2}+1$, а знаменатель $+1$; но $+\sqrt{2}+1$ столь-

кожѣ составляютѣ какѣ и $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$: ибо $\sqrt{2}+1$ умноженное на дѣлителя $1+\sqrt{2}$ какѣ:

$$\begin{array}{l} 1+\sqrt{2} \\ \underline{1+\sqrt{2}} \\ 1+\sqrt{2} \\ \quad +\sqrt{2}+2 \\ \hline \end{array}$$

даетѣ $1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}$

Также $8-5\sqrt{2}$ раздѣленное на $3-2\sqrt{2}$ даетѣ $\frac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$; умножь вѣ верху и вѣ низу на $3+2\sqrt{2}$ то получится числитель а знаменатель

$$\begin{array}{ll} 8-5\sqrt{2} & 3-2\sqrt{2} \\ \underline{3+2\sqrt{2}} & \underline{3+2\sqrt{2}} \\ 24-15\sqrt{2} & 9-6\sqrt{2} \\ \quad +16\sqrt{2}-10.2 & +6\sqrt{2}-4.2 \\ \hline \end{array}$$

$$24+\sqrt{2}-20=4+\sqrt{2},\ 9-8=1$$

Слѣдовательно частное будетѣ $4+\sqrt{2}$; а повѣрка дѣлается такѣ:

$$\begin{array}{l} 4+\sqrt{2} \\ \underline{3-2\sqrt{2}} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 12+3\sqrt{2} \\ \quad -8\sqrt{2}-2.2 \\ \hline 12-5\sqrt{2}-4=8-5\sqrt{2} \end{array}$$

331.

Такимъ образомъ могутъ подобные симъ дроби превращены быть въ другіе, въ коихъ знаменатели раціональные числа. Такъ дробь $\frac{1}{5+2\sqrt{6}}$ когда въ верху и въ низу помножится на $5-2\sqrt{6}$ превратится въ $\frac{5-2\sqrt{6}}{1}=5-2\sqrt{6}$. Также дробь $\frac{2}{-1+\sqrt{-3}}$ превратится въ $\frac{2+2\sqrt{-3}}{-4}=\frac{1+\sqrt{-3}}{-2}$; и $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\frac{11+2\sqrt{30}}{1}=11+2\sqrt{30}$

332.

Когда знаменатель состоять будетъ изъ многихъ членовъ, то подобнымъ сему образомъ исключаются изъ него неизвлекомые числа, какъ въ сей дроби $\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; умножь сперьва въ верху и въ низу на $\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}$, то получится $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5-2\sqrt{6}}$, умножь еще въ верху и въ низу на $5+2\sqrt{6}$ то произойдетъ $5\sqrt{10}+11\sqrt{2}+9\sqrt{3}+2\sqrt{60}$.

Глава

ГЛАВА IX.

О кубахъ и извлеченіи кубичныхъ корней.

333.

Для сысканія куба корня $a+b$ надлежитъ квадратъ его, которой есть $aa+2ab+bb$, умножить еще на $a+b$, и выдетъ искомой кубъ даннаго корня, какъ:

$$\begin{array}{r} aa+2ab+bb \\ a+b \\ \hline a^3+2aab+abb \qquad\quad \\ aab+2abb+b^3 \\ \hline a^3+3aab+3abb+b^3 \end{array}$$

Которой состоитъ изъ кубовъ обѣихъ частей корня, и еще изъ $3aab+3abb$; что столько значитъ какъ $3ab.(a+b)$ то есть: утроенное произведеніе обѣихъ частей на сумму ихъ помноженное.

334

334

И такЪ когда корень состоитЪ изЪ двухЪ частей, то по сему правилу кубЪ его легко найдется. НапримѢрЪ: когда число $5=3+2$, то кубЪ онаго будетЪ $=27+8+18.5=125$.

Пусть будетЪ еще корень $7+3=10$ то кубЪ онаго $=343+27+63.10=1000$; что бы найти кубЪ 36, то положи $36=30+6$ и получится $27000+216+19440=46656$.

335

Естьли же обратно данЪ будетЪ кубЪ $a^3+3aab+3abb+b^3$ и должно будетЪ сыскать его корень, то примѢчай слѢдующее:

ВоперрыхЪ ежели кубЪ по степени какой либо буквы надлежащимЪ образомЪ написанЪ будетЪ, то изЪ самаго перваго члена a^3 познается первой членЪ корня a, котораго кубЪ равенЪ оному, и когда оной вычтется изЪ даннаго куба, то останется $3aab+3abb+b^3$, изЪ чего надлежитЪ сыскать второй членЪ корня.

336

Когда уже мы знаемъ, что сей второй членъ есть $+b$, то должно смотрѣть только, какимъ бы образомъ его изъ вышепомянутаго остатка найти можно было. Оной остатокъ можно изъявить въ двухъ множителяхъ, такъ $(3a^2+3ab+b^2)\,b$, слѣдовательно когда остатокъ раздѣлится на $3a^2+3ab+b^2$, то получится искомой второй членъ корня b.

337.

Но когда второй членъ корня еще намъ не извѣстенъ, то и дѣлитель будетъ также не вѣдомъ; однако довольно того, что мы первую часть сего дѣлителя имѣемъ, то есть $3aa$, или утроенной квадратъ первой уже найденной части корня, изъ которой можно уже найти и вторую часть онаго b, коимъ потомъ дѣлитель помноженъ быть долженъ прежде нежели дѣленіе совершится, и для того надлежитъ къ $3aa$ прибавить еще $3ab$, то есть тройное

про-

произведенїе первой части на вторую, и наконецъ bb, какъ квадратъ второй части корня.

338.

Пусть будетъ данъ напримѣръ такой кубъ:

$$\begin{array}{r|l} a^3+12aa+48a+64 & a+4 \\ a^3 & \\ \hline 3aa+12a+16 \;\big)\; 12aa+48a+64 & \\ 12aa+48a+64 & \\ \hline \end{array}$$

Пусть будетъ еще данъ кубъ:

$$\begin{array}{r|l} a^6-6a^5+15a^4-20a^3+15a^2-6a+1 & aa-2a \\ a^6 & +1 \\ \hline 3a^4-6a^3+4aa \;\big)\; -6a^5+15a^4-20a^3 & \\ -6a^5+12a^4-8a^3 & \\ \hline 3a^4-12a^3+15a^2-6a+1 \;\big)\; 3a^4-12a^3+15a^2-6a+1 & \\ 3a^4-12a^3+15a^2-6a+1 & \\ \hline \end{array}$$

339.

На семъ основано общее правило находить кубичные корни въ числахъ.

Какъ

Какъ изъ числа 2197 извлекается онъ такъ.

2197 } 10 + 3 = 13
1000 }

300 } 1197
99 } 1197

399

Пусть будетъ дано еще кубичное число 46656, изъ котораго надлежитъ найти кубичной корень.

46656 } 30 + 6
27000 }

2700 }
540 } 19656
36 } 19656
3276 }

15|625 } 20 + 5
8|00 }

1200 } 7625
300 }
25 } 7625
1525

ГЛАВА X.

О степеняхъ составныхъ чиселъ.

340.

Послѣ квадратовъ и кубовъ слѣдуютъ вышніе степени, которые сперьва

чрезъ

чрезЪ показателей, какЪ уже выше показано изЪявляется, включая только данной корень, естьли онЪ не изЪ одного знака состоитЪ, вЪ скобки; такЪ $(a+b)^5$ значитЪ пятую степень $a+b$, $(a-b)^6$ шестую степень изЪ $a-b$; а какимЪ образомЪ сїи степени рѢшатся, то показано будетЪ вЪ сей главѢ.

341.

Пусть будетЪ $a+b$ корень или первая степень, то вышшие степени онаго найдутся по умноженїю слѢдующимЪ образомЪ:

$$\begin{array}{l} a+b \\ a+b \\ \hline (a+b)^2 = aa+2ab+bb \\ a+b \\ \hline a^3+2aab+abb \\ \quad aab+2abb+b^3 \\ \hline (a+b)^3 = a^3+3aab+3abb+b^3 \\ a+b \\ \hline a^4+3a^3b+2a^2bb+ab^3 \\ \quad a^3b+3a^2bb+3ab^3+b^4 \\ \hline \end{array}$$

O $(a+b)^4$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2bb + 4ab^3 + b^4$$
$$a + b$$

$$a^5 + 4a^4b + 6a^3bb + 4a^2b^3 + ab^4$$
$$a^4b + 4a^3bb + 6a^2b^3 + 4ab^4 + b^5$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3bb + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$a + b$$

$$a^6 + 5a^5b + 10a^4b^2 + 10a^3b^3 + 5a^2b^4 + ab^5$$
$$a^5b + 5a^4b^2 + 10a^3b^3 + 10a^2b^4 + 5ab^5 + b^6$$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$
$$a + b$$

$$a^7 + 6a^6b + 15a^5b^2 + 20a^4b^3 + 15a^3b^4 + 6a^2b^5 + ab^6$$
$$+ a^6b + 6a^5b^2 + 15a^4b^3 + 20a^3b^4 + 15a^2b^5 + 6ab^6 + b^7$$

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

342.

Такимъ же точно образомъ находятся степени корня $a-b$, съ тою только раз-

разностїю что 2 рой 4 той 6 той и протч: члены будутъ имѣть знакъ отрицательной , какъ изъ слѣдующаго примѣра явствуетъ:

$$a-b$$
$$a-b$$
$$a^2-ab$$
$$-ab+bb$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+bb$$
$$a-b$$
$$a^3-2aab+abb$$
$$-aab+2abb-b^3$$
$$(a-b)^3=a^3-3aab+3abb-b^3$$
$$a-b$$
$$a^4-3a^3b+3aabb\ ab^3$$
$$-a^3b+3aabb-3ab^3+b^4$$
$$(a-b)^4=a^4-4a^3b+6aabb-4ab^3+b^4$$
$$a-b$$
$$a^5-4a^4b+6a^3bb-4a^2b^3+ab^4$$
$$-a^4b+4a^3bb-6a^2b^3+4ab^4-b^5$$

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3bb - 10aab^3 + 5ab^4 - b^5$$
$$a - b$$

$$a^6 - 5a^5b + 10a^4bb - 10a^3b^3 + 5a^2b^4 - ab^5$$
$$-a^5b + 5a^4bb - 10a^3b^3 + 10a^2b^4 - 5ab^5$$
$$+ b^6$$

$$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4bb - 20a^3b^3 + 15a^2b^4$$
$$- 6ab^5 + b^6$$

343.

Здѣсь спрашивается какимъ бы образомъ безъ сего дѣйствительнаго счисленія всѣ степени изъ $a+b$ и $a-b$ найти можно было? при чемъ между протчимъ примѣчать надлежитъ, что когда кто въ состояніи сыскать всѣ степени изъ $a+b$, то изъ того всѣ степени изъ $a-b$ сами найдутся, естьли только знаки четныхъ членовъ, а имянно 2 го, 4 го, 6 го, 8 го и протч, перемѣнятся; слѣдовательно здѣсь надобно только сыскать правило, по которому бы каждую степень изъ $a+b$, какъ бы она велика ни была, найти можно было, не имѣя нужды вычислять всѣ предъидущіе степени.

344.

344.

Когда въ найденныхъ выше сего степеняхъ числа при каждомъ членѣ находящїеся и называемыя *коеффицїенты*, прочь отбросятся, то въ членахъ окажется изрядной порядокъ. На самомъ первомъ мѣстѣ стоитъ искомая степень изъ a и во всѣхъ слѣдующихъ членахъ степень изъ a всегда единицею унижается, на противъ того степени изъ b всегда единицею возвышаются, такъ что сумма указателей изъ a и b равна во всѣхъ членахъ. Такъ когда требуется 10 тая степень изъ $a+b$, то члены безъ коеффицїентовъ идутъ такимъ порядкомъ: $a^{10}, a^9b, a^8b^2, a^7b^3, a^6b^4, a^5b^5, a^4b^6, a^3b^7, a^2b^8 ab^9, b^{10}$.

345.

И такъ надлежитъ только показать, какимъ образомъ надлежащїе къ тѣмъ членамъ коеффицїенты находить должно, или на какїе числа каждой членъ помноженъ быть долженствуетъ. Что касается до перваго члена, то коеффи-

ціентъ его всегда равенъ единицѣ, а втораго равенъ всегда показателю самой той степени, которая ищется; въ слѣдующихъ членахъ на противъ того не такъ легко примѣтить можно порядокъ, коимъ они идутъ, между тѣмъ когда сіи коеффиціенты мало по малу продолжать станешь далѣе, то наконецъ можно будетъ ихъ легко продолжать такъ далеко, какъ кто пожелаетъ: что изъ слѣдующей таблицы видно.

Степ.		
I.	- - коеффиц.	1, 1
II.	- - - - -	1, 2, 1
III.	- - - - -	1, 3, 3, 1
IV.	- - - - - -	1, 4, 6, 4, 1
V.	- - - -	1, 5, 10, 10, 5, 1,
VI.	- - -	1, 6, 15, 20, 15, 6, 1,
VII.	- - -	1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1,
VIII.	- -	1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1,
IX.	- -	1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1
X.		1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1.

Такимъ образомъ десятая степень изъ $a+b$ будетъ.

$$a^{10}+10a^9b+45a^8b^2+120a^7b^3+210a^6b^4$$
$$+252a^5b^5+210a^4b^6+120a^3b^7+45a^2b^8+10ab^9$$
$$+b^{10}.$$

346.

346.

При сихъ коеффиціентахъ примѣчать надлежитъ, что сумма ихъ въ каждой степени должна произвесть точную степень 2хъ: ибо положи $a=1$, $b=1$ каждой членъ, выключая коеффиціенты, равенъ будетъ 1 такъ что однихъ только коеффиціентовъ должно складывать вмѣстѣ; по чему 10 тая степень $(1+1)^{10}$ $=2^{10}=1024$. Тоже самое разумѣется и о всѣхъ протчихъ степеняхъ, такъ

для первой степени будетъ $1+1=2$

для второй $1+2+1=4=2^2$

— третей $1+3+3+1=8=2^3$

— четвертой $1+4+6+4+1=16$ $=2^4$

5 той $1+5+10+10+5+1$ $=32=2^5$

6 той $1+6+15+20+15+6$ $+1=64=2^6$

7 мой $1+7+21+35+35+21$ $+7+1=128=2^7$ и прот.

 347.

347.

Въ разсужденіи сихъ коеффиціентовъ еще примѣчать надлежитъ, что они отъ начала до средины растутъ, а потомъ тѣмъ же порядкомъ уменьшаются. Въ четныхъ степеняхъ самой большей коеффиціентъ стоитъ въ срединѣ, а въ нечетныхъ два средніе самые большіе и между собою равные.

Самой порядокъ коеффиціентовъ надлежитъ обстоятельнѣе разсмотрѣть, дабы ихъ для каждой степени находить можно было, не имѣя нужды въ предъидущихъ. На сей конецъ предложимъ здѣсь правило, коего доказательство оставляемъ до слѣдующей главы.

348.

Для сысканія коеффиціентовъ какой ни будь данной степени, наприм. 7 мой, напиши по порядку слѣдующіе дроби $\frac{7}{1}, \frac{6}{2}, \frac{5}{3}, \frac{4}{4}, \frac{3}{5}, \frac{2}{6}, \frac{1}{7}$, гдѣ числители начинаются съ показателя требуемой степени, а знаменатели идутъ по порядку чиселъ какъ:

1,

1, 2, 3, 4 и протч. поелику первой коеффиціентъ всегда равенъ 1, то первая дробь даетъ втораго коеффиціента, первые двѣ дроби помноженные между собою даютъ третьяго, три первые умноженные между собою 4 таго. и такъ далѣе.

Слѣдовательно первой коефф. будетъ $= 1$, 2 рой $\frac{7}{1} = 7$, 3 тей $= \frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2} = 21$; 4 той $= \frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{3} = 35$; 5 той $= \frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{4} = 35$, 6 той $= \frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{4} \cdot = 21$, 7 мой $= \frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} = 7$, 8 мой $= 7 \cdot \frac{1}{7} = 1$.

349.

Слѣдовательно для второй степени будутъ сіи дроби $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{2}$, почему первой коефф. $= 1$, второй $= \frac{2}{1} = 2$, третей $= 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

Для третей степени будутъ слѣдующіе дроби $\frac{3}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{3}$ и потому первой коефф. $= 1$, второй $= \frac{3}{1} = 3$, 3 тей $= \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{2} = 3$, 4 той $\frac{3}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{3} = 1$.

Для четвертой степени будутъ сіи дроби $\frac{4}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$: первой коефф. $= 1$, 2 рой $= \frac{4}{1} = 4$, 3 тей $= 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$, 4 той $= 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$, 5 той $= 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$.

350.

Сіе правило подаетъ намъ ту способность, что предъидущихъ коеффиціентовъ знать не требуется, но для каждой степени надлежащіе коеффиціенты тотчасъ найти можно. Такъ для 10той степени пишутся сіи дроби $\frac{10}{1}, \frac{9}{2}, \frac{8}{3}, \frac{7}{4}, \frac{6}{5}, \frac{5}{6}, \frac{4}{7}, \frac{3}{8}, \frac{2}{9}, \frac{1}{10}$ оттуда получится 1вой коефф. $= 1$, 2рой $= \frac{10}{1} = 10$, 3тей $= 10.\frac{9}{2} = 45$, 4той $= 45.\frac{8}{3} = 120$, 5той. $120.\frac{7}{4}. = 210$, 6той $= 210.\frac{6}{5} = 252$, 7мой $= 252.\frac{5}{6} = 210$, 8мой $= 210.\frac{4}{7} = 120$, 9той $= 120.\frac{3}{8} = 45$, 10той $= 45.\frac{2}{9} = 10$, 11той $= 10.\frac{1}{10} = 1$.

351.

Сіи дроби можно также просто выписывать каковы они есть, не искавъ ихъ точнаго знаменованія, и такимъ образомъ не трудно будетъ написать каждую степень изъ $(a+b)$ какъ бы она велика ни была. Такъ 100тая степень изъ $(a+b) = (a+b)^{100} = a^{100} + \frac{100}{1}a^{99}b + \frac{100}{1}.$

$\frac{99}{2}a^{98}b^{2} + \frac{100.99.98}{1.2.3}a^{97}b^{3} + \frac{100.99.98.97}{1.2.3.4}a^{96}b^{4} + \frac{100.99.}{1.2}$ $\frac{98.97.96}{3.4.5}a^{95}b^{5} + \frac{100.99.98.97.96.95}{1.2.3.4.5.6}a^{94}b^{6}$, и такъ далѣе; изъ чего порядокъ слѣдующихъ членовъ каждой видѣть можетъ.

ГЛАВА XI.

О переложении буквъ, на чемъ доказательство прежде даннаго правила основано.

352.

Естьли кто разсматривать станетъ произхожденіе помянутыхъ коеффиціентовъ, тотъ примѣтитъ, что каждой членъ столько разъ тамъ находится, сколько разъ буквы, изъ которыхъ оной состоитъ переложить можно; какъ во второй степени членъ *ab* находится два раза, потому что можно написать *ab* и *ba*, напротивъ того *aa* только однажды, для того что въ порядкѣ буквъ нѣтъ никакой перемѣны. При 3 тей степени членъ *aab* можетъ написанъ быть тремя обра-

образами какЪ *aab* , *aba* , *baa* , и для того коеффиціентЪ его также 3 : равнымЪ образомЪ вЪ четвертой степени членЪ a^3b можетЪ переложенЪ быть четырмя образами , какЪ *aaab* , *aaba* , *abaa*, *baaa* , и для того коеффиціентЪ его есть 4 , членЪ же *aabb* имѢетЪ коеффиціента 6, для того что членЪ *aabb* шесть разЪ переложить можно какЪ *aabb*, *abba*, *bbaa*, *baba*, *abab*, *baab*, то же самое наблюдать надлежитЪ , при всѢхЪ прочихЪ членахЪ степени.

353.

Усмотря вЪ самомЪ дѢлѢ, что наприм. 4 тая степень каждаго корня, хотя оной больше нежели изЪ двухЪ частей состоитЪ, какЪ $(a+b+c+d)$ найдется , когда слѢдующіе 4 множителя между собою помножатся I. $a+b+c+d$, II. $a+b+c+d$, III. $a+b+c+d$, IV. $a+b+c+d$. ЗдѢсь надлежитЪ каждую букву перваго множителя каждою втораго , каждою третьяго , и каждою четвертаго помножить , по чему каждой членЪ долженЪ

состоять изъ 4 хъ буквъ, и такое имѣть при себѣ число, сколько разъ онаго буквы переставить можно, то есть симъ образомъ коеффиціентъ его опредѣлится.

354.

Здѣсь главное дѣло состоитъ въ томъ, сколько разъ какое ни будь число буквъ переложить можно, при чемъ особливо смотрѣть надлежитъ, будутъ ли оные буквы одинаки или нѣтъ; ибо когда они всѣ одинаки, то и перекладывать ихъ не льзя, по которой притчинѣ простые степени, какъ a^2, a^3, a^4 всѣ 1 коефф. имѣютъ.

355.

Возмемъ теперь разные буквы начавъ съ двухъ, какъ то ab, гдѣ двѣ только перемѣны имѣютъ мѣсто, а имянно ab, ba.

Когда же будутъ три буквы разные какъ abc, то видно, что каждая изъ нихъ первое мѣсто имѣть можетъ, а двѣ протчіе два раза переложить можно;

слѣд.

слѣд. когда *a* стоитъ напереди, тогда будутъ двѣ переставки *abc*, *acb*; и столько же переставокъ будетъ когда *b*, на первомъ мѣстѣ положится, какъ *bac*, *bca*; и напослѣдокъ положивъ съ начала *c* получатся послѣдніе двѣ переставки какъ *cab*, *cba*; и такъ всѣхъ переложеній трехъ буквъ сумма будетъ 3.2=6.

Когда же будутъ 4 буквы *abcd*, тогда каждая можетъ стоять на первомъ мѣстѣ, и въ каждой разъ 3 прочіе буквы даютъ 6 перемѣнъ, слѣдовательно число всѣхъ переложеній будетъ 4.6=24 =1.2.3.4 или 4.3.2.1.

А ежели дано будетъ 5 буквъ *abcde*, то равнымъ образомъ какъ и прежде каждая изъ нихъ первое мѣсто занимать можетъ, и въ каждомъ случаѣ прочіе 4 могутъ переложены быть 24 раза, чего ради число всѣхъ переложеній будетъ 5.24=120=5.4.3.2.1.

356.

Какъ бы велико число буквъ ни было, только естьли всѣ они не одина-

ки

ки, число всѣхъ переложенїй весьма легко опредѣлить можно, какъ изъ слѣдующей таблицы явствуетъ:

чис. бук.	
I.	- число переложенїй 1 = 1
II.	- - - - - 2. 1 = 2
III.	- - - - 3. 2. 1 = 6
IV.	- - - - 4. 3. 2. 1 = 24
V.	- - - 5. 4. 3. 2. 1 = 120
VI.	- - 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 720
VII.	- - 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 5040
VIII.	- 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 40320
IX.	9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 362880
X.	10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 3628800

357.

Но надлежитъ примѣчать, что найденныя числа тогда только справедливы, когда данные буквы не одинаки. Ибо когда 2 или больше изъ нихъ будутъ одинаки, то число переложенїй гораздо уменьшится; а естьли они всѣ будутъ одинаки, то и перемѣны никакой не имѣется. Посмотримъ какъ по

числу

числу такихЪ одинакихЪ буквЪ уменьшаются помянутыя числа переложеній.

358.

Ежели будутЪ двѢ буквы одинаки, то двѢ перемѢны за одну щитать должно, и для того выше найденное число вЪ половину уменьшится, или на 2 раздѢлится. Когда же 3 буквы одинаки, то 6 переложеній щитаются за одну, и для того помянутое число на 6 = 3. 2. 1 раздѢлится. РавнымЪ образомЪ естьли будутЪ 4 буквы одинакіе, то прежнее число переложеній раздѢлить должно на 24 = 4. 3. 2. 1, и такЪ далѢе.

По сему опредѢлить можно, сколько разЪ буквы *aaabbc* переложить можно. Число ихЪ всѢхЪ есть 6, и естьли бы они всѢ были разные, то бы число перемѢнЪ было 6 5 4.3 2 1; но поелику вЪ немЪ *a* находится 3 раза, то раздѢлить его должно на 3.2.1, и притомЪ *b* также 2 раза попадается, то оное же число раздѢлить надобно еще на 2.1 слѢд. число переложеній будетЪ $\frac{6.5.4.3.2.}{3.2.1.2.1} = 5.4.3 = 60$.

359.

359.

Отсюда можемъ мы коеффиціенты каждаго члена, и для каждой степени, опредѣлить безъ труда, что мы напр. для 7 мой степени $(a+b)^7$ покажемъ. Здѣсь первой членъ есть a^7, которой только на 1 помноженъ, и когда во всѣхъ протчихъ членахъ 7 буквъ находится, то число всѣхъ переложеній было бы 7.6 5.4. 3.2.1, естьли бы они всѣ были разные; но понеже во второмъ членѣ a^6b 6 одинакихъ буквъ находится, то оное число должно раздѣлить на 6.5.4 3.2.1 откуда произойдетъ коеффиціентъ его $=\frac{7.6.5.4.3.2.1}{6.5.4.3.2.1}$ $=\frac{7}{1}$.

Въ третьемъ членѣ a^5bb a находится 5 разъ а b два раза, для того оное число должно раздѣлить, на 5 4.3.2.1 и еще на 2.1; по чему искомой коеффиціентъ будетъ $\frac{7.6.5.4.3.2.1}{5.4.3.2.1.2.1}=\frac{7.6}{1.2}$.

Въ четвертомъ членѣ a^4b^3 a находится 4 раза, а b 3 раза, и такъ помянутое число раздѣлить должно на 4 3.2.1,

и на 3.2.1, отсюда искомой коеффиціентъ $= \frac{7.6.5.4.3.2.1}{4.3.2.1.3.2.1} = \frac{7.6.5}{1.2.3}$.

Равнымъ образомъ 5 таго члена a^3b^4 коеффиціентъ $= \frac{7.6.5.4.3.2.1}{3.2.1.4.3.2.1.} = \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}$ и такъ далѣе; и симъ вышепоказанное правило доказывается.

360.

Сіи разсужденія ведутъ насъ еще далѣе и показываютъ какимъ образомъ надлежитъ находить всѣ степени и такихъ корней, которые больше нежели изъ двухъ частей состоятъ. Сіе изъяснимъ мы третьею степенью $(a+b+c)^3$, гдѣ всѣ возможныя переложенія трехъ буквъ, такъ какъ члены находиться должны, и каждой членъ коеффиціентовъ своихъ имѣть будетъ: слѣдовательно третья искомая степень есть $a^3+3aab+3aac+3abb+6abc+3acc+b^3+3bbc+3bcc+c^3$. Положимъ $a=1, b=1, c=1$ и будетъ кубъ $1+1+1$, то есть, $3=1+3+3+3+6+3+1+3+3+1=27$; естьли же положится

ложится $a=1, b=1, c=-1$ то будетъ кубъ изъ $1+1-1$ то есть, изъ $1=1+3-3+3-6+3+1-3+3-1=1$.

ГЛАВА XII.

О разрѣшеніи неизвлекомыхъ степеней на безконечные ряды.

361.

Мы уже показали, какимъ образомъ изъ корня $a+b$ всякую степень находить должно, сколь бы великъ показатель ни былъ, то можемъ теперь изъявить вообще степень изъ $a+b$, хотя показатель будетъ неопредѣленное число, и изображенное буквою n.

Такъ по предписанному выше сего правилу найдется

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{n-3}b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}a^{n-4}b^4 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}a^{n-5}b^5$$

и такъ далѣе.

362.

Естьли бы мы захотѣли имѣть такую же степень корня $a-b$, то надлежало бы только перемѣнить знаки 2 го, 4 таго, 6 го, 8 го и протч: членовъ въ противные, откуду получится.

$$(a-b)^n = a^n - \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}a^{n-4}b^4 - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}a^{n-5}b^5.$$

363.

Сіи формулы служатъ намъ для изъявленія всякихъ родовъ корней: ибо когда уже мы показали какимъ образомъ корни въ ломаныхъ показателяхъ изъявиться могутъ, какъ $\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$ и такъ далѣе, то будетъ также $\sqrt[2]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[4]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{4}}$ и такъ далѣе. Слѣдовательно чтобы найти квадратной корень изъ $(a+b)$ поставь въ первой общей формулѣ мѣсто показателя n, $\frac{1}{2}$, откуду коеффиціенты произойдутъ такіе:

$\frac{n}{1} = \frac{1}{2}$;

$\frac{n}{1}=\frac{1}{2}$, $\frac{n-1}{2}=-\frac{1}{4}$, $\frac{n-2}{3}=-\frac{3}{6}$, $\frac{n-3}{4}=-\frac{5}{8}$, $\frac{n-4}{5}=-\frac{7}{10}$, $\frac{n-5}{6}=-\frac{9}{12}$, а потомъ $a^n=a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$; и $a^{n-1}=\frac{1}{\sqrt{a}}$, $a^{n-2}=\frac{1}{a\sqrt{a}}$, $a^{n-3}=\frac{1}{aa\sqrt{a}}$ и протч. Сїи степени числа a можно изобразить и такъ $a^n=\sqrt{a}$, $a^{n-1}=\frac{a^n}{a}=\frac{\sqrt{a}}{a}$, $a^{n-2}=\frac{a^n}{a^2}=\frac{\sqrt{a}}{aa}$, $a^{n-3}=\frac{a^n}{a^3}=\frac{\sqrt{a}}{a^3}$, $a^{n-4}=\frac{a^n}{a^4}=\frac{\sqrt{a}}{a^4}$ и такъ далѣе.

364.

По сему квадратной корень изъ $(a+b)$ изобразится такъ.

$$\sqrt{(a+b)}=\sqrt{a}+\tfrac{1}{2}b\frac{\sqrt{a}}{a}-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}b^2\frac{\sqrt{a}}{a^2}+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot b^3\frac{\sqrt{a}}{a^3}-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot b^4\frac{\sqrt{a}}{a^4}$$ и протч.

365.

Ежели a будетъ квадратное число, то $\sqrt{a}$ опредѣлить можно, а квадратной корень изъ $(a+b)$ безъ кореннаго знака безконечнымъ рядомъ чиселъ изъявиться можетъ.

Такъ когда $a=cc$ то $\sqrt{a}=c$ и будетъ $\sqrt{(c^2+b)}=c+\tfrac{1}{2}\frac{b}{c}-\tfrac{1}{8}\frac{b^2}{c^3}+\tfrac{1}{16}\frac{b^3}{c^5}-\tfrac{5}{128}\frac{b^4}{c^7}$ и протч.

Симъ образомъ изъ каждаго числа можно извлекать квадратной корень, потому что каждое число раздѣлить можно на двѣ части изъ одной будетъ квадратъ, которой здѣсь изъявляетъ cc. Ежели должно будетъ наприм: извлечь квадратной корень изъ 6, то положи $6 = 4 + 2$, и тогда будетъ $cc = 4$, $b = 2$, того ради $\sqrt{6} = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{5}{1024}$ и протч. и когда изъ сего ряда возмутся только два первыя члена, то произойдетъ $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$; коего квадратъ $\frac{25}{4}$, $\frac{1}{4}$ тью только больше нежели 6; взявъ три первые члена получится $2\frac{7}{16} = \frac{39}{16}$, коего квадратъ $\frac{1521}{256}$, $\frac{15}{256}$ ми меньше нежели 6.

366.

Когда въ томъ же примѣрѣ $\frac{5}{2}$ уже весьма близко къ правдѣ подходятъ, то можно положить

$6 = \frac{25}{4} - \frac{1}{4}$; по чему $cc = \frac{25}{4}$, $c = \frac{5}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$, по которымъ вычисля два первые члена выдетъ $\sqrt{6} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{5}{2} - \frac{1}{20}$

$= \frac{49}{20}$

$=\frac{49}{20}$, котораго числа квадратЪ $\frac{2401}{400}$ только $\frac{1}{400}$ тою частью больше нежели 6.

Положимъ теперь $6=\frac{2401}{400}-\frac{1}{400}$, то будетъ $c=\frac{49}{20}$ и $b=-\frac{1}{400}$, откуда взявъ паки только два первые члена будетъ $\sqrt{6}=\frac{49}{20}+\frac{1}{2}\cdot-\frac{\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}}=\frac{49}{20}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}}=\frac{49}{20}-\frac{1}{1960}=\frac{4801}{1960}$, коего квадратъ $=\frac{23049601}{3841600}$; а понеже $6=\frac{23049600}{3841600}$, то погрѣшность будетъ не болѣе какъ $\frac{1}{3841600}$ часть.

367.

Равнымъ образомъ изобразить можно и кубичной корень безконечнымъ рядомъ: ибо когда $\sqrt[3]{(a+b)}=(a+b)^{\frac{1}{3}}$, то въ общей нашей формулѣ будетъ $n=\frac{1}{3}$; чего ради коеффиціенты будутъ слѣдующіе: $\frac{n}{1}=\frac{1}{3}$, $\frac{n-1}{2}=-\frac{1}{3}$, $\frac{n-2}{3}=-\frac{5}{9}$, $\frac{n-3}{4}=-\frac{2}{3}$, $\frac{n-4}{5}=-\frac{11}{15}$ и протч.; а для степени изъ a, $a^n=\sqrt[3]{a}$, $a^{n-1}=\frac{\sqrt[3]{a}}{a}$, $a^{n-2}=\frac{\sqrt[3]{a}}{a^2}$, $a^{n-3}=\frac{\sqrt[3]{a}}{a^3}$ и протч. откуду получится

$$\sqrt[3]{(a+b)}=\sqrt[3]{a}+\frac{1}{3}\frac{b\sqrt[3]{a}}{a}-\frac{1}{9}\frac{bb\sqrt[3]{a}}{a^2}+\frac{5}{81}\frac{b^3\sqrt[3]{a}}{a^3}$$

$$-\frac{10}{243}\frac{b^4\sqrt[3]{a}}{a^4}$$ и протч.

368.

И такъ ежели a будетъ кубъ, то есть $a = c^3$, то $\sqrt[3]{a} = c$, и для сей причины пропадутъ всѣ коренные знаки, и выдетъ $\sqrt[3]{(c^3+b)} = c + \frac{1}{3}\frac{b}{c^2} - \frac{1}{9}\frac{b^2}{c^5} + \frac{5}{81}\frac{b^3}{c^8} - \frac{10}{243}\frac{b^4}{c^{11}}$ и прочч.

369.

Помощію сей формулы можно теперь изъ всякаго числа извлекать корень кубичной чрезъ приближеніе, потому что каждое число можетъ раздѣлиться на двѣ части, какъ $c^3 + b$, изъ коихъ первая есть кубъ.

Такъ когда надобно будетъ найти кубичной корень двухъ, то положи $2 = 1 + 1$, и будетъ $c = 1$, $b = 1$, слѣдовательно

$\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{5}{81}$ и прочч. изъ коихъ первые двѣ члена даютъ $1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, коего кубъ $\frac{64}{27}$ превозходитъ $\frac{10}{27}$ ми частями число 2, и для того положи $1 = \frac{64}{27} - \frac{10}{27}$ то есть, $c = \frac{4}{3}$ и $b = -\frac{10}{27}$ того ради

$\sqrt[3]{2} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{-\frac{10}{27}}{\frac{16}{9}}$ и прочая. Сiи два члена $\frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{10}{27}}{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} - \frac{5}{72} = \frac{91}{72}$, коего кубъ $= \frac{753571}{393248}$, но понеже $2 = \frac{786496}{393248}$, слѣдовательно погрѣшность $= \frac{7175}{373248}$ частямъ, и такимъ образомъ можно естьли кто похочетъ подходить къ точному корню часъ отъ часу ближе, особливо когда возмется больше членовъ.

ГЛАВА XIII.

О разрѣшенiи отрицательныхъ степеней.

370.

Выше сего показано было, что $\frac{1}{a}$ можетъ изъявиться чрезъ a^{-1}, и для того также $\frac{1}{a+b}$ чрезъ $(a+b)^{-1}$, такъ что дробь $\frac{1}{a+b}$ почесться можетъ за степень изъ $a+b$, которой показатель есть -1,

 почему

почему вышснайденной рядЪ для $(a+b)^n$ заключаетЪ вЪ себѢ и сей случай.

371.

Когда $\frac{1}{a+b}$ то же что и $(a+b)^{-1}$, то положи вЪ прежней формулѢ $n = -1$ коеффиціенты будутЪ $\frac{n}{1} = -1$, $\frac{n-1}{2} = -1$, $\frac{n-2}{3} = -1$, $\frac{n-3}{4} = -1$, $\frac{n-4}{5} = -1$, и потомЪ для степени числа a, $a^n = a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{n-1} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; $a^{n-2} = a^{-3} = \frac{1}{a^3}$; $a^{n-3} = a^{-4} = \frac{1}{a^4}$ и такЪ далѢе, чего ради получимЪ мы $(a+b)^{-1} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5}$ и пр. что даетЪ намЪ самой тотЪ же рядЪ, который выше сего найденЪ былЪ по дѢленію.

372.

Когда $\frac{1}{(a+b)^2}$ то же, что и $(a+b)^{-2}$, то можно также разрѢшить и сію формулу вЪ безконечной рядЪ.

Положи сперва $n = -2$ коеффиціенты будутЪ $\frac{n}{1} = -2$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{3}{2}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{4}{3}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{5}{4}$ и протч.; а степени изЪ a, $a^n = \frac{1}{a^2}$

a

$a^{n-1} = \frac{1}{a^3}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a^4}$, $a^{n-3} = \frac{1}{a^5}$, $a^{n-4} = \frac{1}{a^6}$, и прот. откуда произойдетъ

$$(a+b)^{-2} = \frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{2}{1} \cdot \frac{b}{a^3} + \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \frac{b^2}{a^4} - \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{b^3}{a^5} + \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{b^4}{a^6}$$ и протч.; но $\frac{2}{1} = 2$, $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} = 3$, $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 4$, $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = 5$ и протч. будетъ $\frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a^2} - 2\frac{b}{a^3} + 3\frac{b^2}{a^4} - 4\frac{b^3}{a^5} + 5\frac{b^4}{a^6} - 6\frac{b^5}{a^7} + 7\frac{b^6}{a^8}$ и протч.

373.

Естьли мы еще положимъ $n = -3$, то получимъ рядъ мѣсто $(a+b)^{-3}$ то есть, мѣсто $\frac{1}{(a+b)^3}$; въ которомъ коеффиціенты будутъ $\frac{n}{1} = -\frac{3}{1}$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{4}{2}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{5}{3}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{6}{4}$, и протчая; а степени изъ числа a будетъ $a^n = \frac{1}{a^3}$, $a^{n-1} = \frac{1}{a^4}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a^5}$, $a^{n-3} = \frac{1}{a^6}$, $a^{n-4} = \frac{1}{a^7}$ и протч. изъ сего получимъ мы $\frac{1}{(a+b)^3} = \frac{1}{a^3} - \frac{3}{1} \frac{b}{a^4} + \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \frac{b^2}{a^5} - \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{b^3}{a^6}$ и протч. $= \frac{1}{a^3} - 3\frac{b}{a^4} + 6\frac{b^2}{a^5} - 10\frac{b^3}{a^6} + 15\frac{b^4}{a^7} - 21\frac{b^5}{a^8}$ и протч. положивъ еще $n = -4$, коеффиціенты будутъ $\frac{n}{1} = -4$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{5}{2}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{6}{3}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{7}{4}$ и протч. Степени же

изъ

изъ a, $a^n = \frac{1}{a^4}$, $a^{n-1} = \frac{1}{a^5}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a^6}$ и протч. откуда найдется $\frac{1}{(a+b)^4} = \frac{1}{a^4} - \frac{4}{1}\frac{b}{a^5} + \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\frac{b^2}{a^6} - \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\frac{b^3}{a^7} + \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{7}{4}\frac{b^4}{a^8} - \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{8}{5}\cdot\frac{b^5}{a^9}$ и протч. $= \frac{1}{a^4} - 4\frac{b}{a^5} + 10\frac{b^2}{a^6} - 20\frac{b^3}{a^7} + 35\frac{b^4}{a^8} - 56\frac{b^5}{a^9} + 84\frac{b^6}{a^{10}}$ и протч.

374.

Отсюда смѣло заключить мы можемъ, что каждая такая отрицательная степень вообще будетъ

$$\frac{1}{(a+b)^m} = \frac{1}{a^m} - \frac{m}{1}\frac{b}{a^{m+1}} + \frac{m(m+1)}{1.2}\frac{b^2}{a^{m+2}} - \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}\frac{b^3}{a^{m+3}} - \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3.4.}\frac{b^4}{a^{m+4}}$$ и протч.

изъ которой формулы всѣ сіи дроби въ безконечной рядъ обратятся; здѣсь мѣсто m можно брать также и дроби, чтобы изобразить неизвлекомыя Формулы.

375.

Къ большей ясности присовокупимъ еще сіе: когда мы нашли что $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5}$ и такъ безконечно, то по-

множимъ

множимъ сей рядъ на $a+b$, ибо тогда въ произведенїи должно выпти 1 умноженїе сїе дѣлается такъ:

$$\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}-\frac{b^5}{a^6} \text{ и протч.}$$

$$a+b$$

$$1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{aa}-\frac{b^3}{a^3}+\frac{b^4}{a^4}-\frac{b^5}{a^5} \text{ и протч.}$$

$$+\frac{b}{a}-\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^3}{a^3}-\frac{b^4}{a^4}+\frac{b^5}{a^5} \text{ и протч.}$$

произведенїе $=1$, какъ непремѣнно слѣдовать должно.

376.

Мы еще нашли что $\frac{1}{(a+b)^2}2=\frac{1}{a^2}-\frac{2b}{a^3}+\frac{3b^2}{a^4}-\frac{4b^3}{a^5}+\frac{5b^4}{a^6}-\frac{6b^5}{a^7}$ и протч., то есть-ли сей рядъ умножится на $(a+b)^2$, въ произведенїи должна также выпти единица; и поелику $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, то умноженїе здѣлается такъ:

$$\frac{1}{aa}-\frac{2b}{a^3}+\frac{3b^2}{a^4}-\frac{4b^3}{a^5}+\frac{5b^4}{a^6}-\frac{6b^5}{a^7} \text{ и протч.}$$

$$aa+2ab+bb$$

$$1-\frac{2b}{a}+\frac{3b^2}{a^2}-\frac{4b^3}{a^3}+\frac{5b^4}{a^4}-\frac{6b^5}{a^5} \text{ и протч.}$$

$+\frac{2b}{a}$

$$+\frac{2b}{a}-\frac{4b^2}{a^2}+\frac{6b^3}{a^3}-\frac{8b^4}{a^4}+\frac{10b^5}{a^5}$$ и протч.

$$+\frac{b^2}{a^2}-\frac{2b^3}{a^3}+\frac{3b^4}{a^4}-\frac{4b^5}{a^5}$$ и протч.

Произведеніе 1, какъ самое свойство вещи требуетъ.

377.

Ежели бы мѣсто $\frac{1}{(a+b)^2}$ найденной рядъ должно было помножить только на $a+b$, то надлежало бы выитти въ произведеніи $\frac{1}{a+b}$ или найденному прежде ряду мѣсто сей дроби $\frac{a}{1}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}-\frac{b^5}{a^6}$ и протч. что также подтверждаетъ слѣдующее умноженіе

$$\frac{1}{aa}-2\frac{b}{a^3}+3\frac{b^2}{a^4}-4\frac{b^3}{a^5}+5\frac{b^4}{a^6}-6\frac{b^5}{a^7}$$

$$a+b$$

$$\frac{1}{a}-2\frac{b}{a^2}+3\frac{b^2}{a^3}-4\frac{b^3}{a^4}+5\frac{b^4}{a^5}-6\frac{b^5}{a^6}$$ и протч.

$$+\frac{b}{a^2}-2\frac{b^2}{a^3}+3\frac{b^3}{a^4}-4\frac{b^4}{a^5}+5\frac{b^5}{a^6}$$ и протч.

$$\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}-\frac{b^5}{a^6}.$$ и протч.

Конецъ второй части, о разныхъ изчисленія способахъ составныхъ количествъ.

ЧАСТЬ ТРЕТІЯ,
о содержаніи и пропорціи.

ГЛАВА I.

О содержаніи ариѳметическомъ или разностяхъ двухъ чиселъ.

378.

Два количества бываютъ между собою равны или не равны. Въ послѣднемъ случаѣ одно количество будетъ болше, а другое меньше; о неравенствѣ ихъ спрашивать можно двоякимъ образомъ: иногда спрашивается, чѣмъ одно число больше другаго? а иногда во сколько разъ одно больше другаго? оба сіи опредѣленія *содержанiемъ* называются, первое

вое называется *ариѳметическимъ содержанїемъ*, а другое *геометрическимъ*. Наименованїя сіи не имѣютъ никакого сообщества съ самою вещью, но введены только по одному произволенїю.

379.

Здѣсь само чрезъ себя разумѣется, что количества, которыя между собою сносятся, должны быть одинакаго роду, впротчемъ не можно бы было ничего сказать о ихъ равенствѣ или неравенствѣ Весьма бы чудно было, естьли бы кто спросилъ наприм. 2 фунта и 3 локтя равны ли или не равны между собою? По сей причинѣ здѣсь говорится вездѣ о величинахъ одного роду, и поелику ихъ числами означать можно, то какъ уже и прежде упомянуто было, разсуждается здѣсь объ однихъ только числахъ.

380.

Когда будетъ спрашиваться о двухъ числахъ, чѣмъ одно изъ нихъ больше другаго, то чрезъ сей вопросъ опредѣлится

лится ариѳметическое содержаніе; а учинится сіе, когда возмется разность между обоими числами: слѣдов. ариѳметическое содержаніе, ничто иное есть, какъ разность между двумя числами. Которое послѣднее слово (разность) съ большою пристойностію въ семъ случаѣ употребляется, такъ, что слово *содержаніе*, при такъ называемомъ *геометрическомъ содержаніи*, только удерживается.

381.

Понеже разность между двумя числами находится, когда меньшее число изъ большаго вычтется, то симъ образомъ разрѣшится вопросъ, чѣмъ одно число больше другаго. И такъ когда оба числа равны будутъ между собою; то разность ихъ равна нулю, и ежели спросится, чѣмъ одно число болше другаго? то отвѣчать надлѣжитъ: ни чѣмъ. Напр. 6=2.3, то разность между 6 и 2.3 есть нуль.

382.

Естьли же оба числа будутъ не равны, какъ 5 и 3, а притомъ спрашивается чѣмъ 5 больше 3хъ; отвѣтъ: 2мя, которое число найдется, ежели изъ 5 вычтется 3; равнымъ образомъ 15 5тью больше нежели 10, а 20 8ю больше 12ти.

383.

И такъ здѣсь входятъ въ разсужденіе слѣд. вещи; (1, большее число; (2, меньшее и напослѣдокъ въ 3тьихъ разность, которые всѣ такое сопряженіе между собою имѣютъ, что ежели двѣ изъ оныхъ даны будутъ, то всегда найти можно третью. Пусть будетъ большее число $=a$, меньшее $=b$, разность d, то разность d найдется, ежели меньшее число изъ большаго вычтется какъ $d=a-b$, откуда видно какъ изъ данныхъ a и b находить d.

384.

Когда же даны будутъ меньшее число b и разность d, то изъ нихъ большее

шее найдется, когда къ меньшему придастся разность, то есть, $a=b+d$; ибо ежели изъ $b+d$ вычтется меньшее число b, то останется разность d. Положимъ меньшее число 12 и разность 8, то большее будетъ $=20$.

385.

А когда даны будутъ большое число a, и разность d, то меньшее найдется, когда разность вычтется изъ большаго; по чему $a-d=b$. Ибо когда я число $a-d$ вычту изъ большаго a, то останется d данная разность.

386.

Изъ соединеній сихъ трехъ чиселъ, выходятъ 3 опредѣленія 1е $d=a-b$, 2е, $a=b+d$, 3е $b=a-d$, и естьли изъ сихъ трехъ уравненій, хотя одно которое нибудь справедливо, то и всѣ протчія непремѣнно справедливы; слѣд: когда вообще $z=x+y$, то будетъ не премѣнно $y=z-x$ и $x=z-y$.

387.

При такомъ ариѳметическомъ содержаніи надлежитъ примѣчать, что когда къ обоимъ числамъ a и b какое нибудь число по произволенію c придано или изъ нихъ вычтено будетъ, разность ихъ не перемѣняется. Слѣдовательно когда d есть разность между a и b, то таже самая разность будетъ между $a+c$ и $b+c$ или между $a-c$ и $b-c$ наприм. между числами 20 и 12 разность есть 8, то разность сія не перемѣнится естьли къ 20 и 12 одно число придастся или изъ нихъ вычтется.

388.

Доказательство сему очевидно: ибо когда $a-b=d$, то будетъ также $(a+c)-(b+c)=d$ и $(a-c)-(b-c)=d$.

389.

Когда оба числа a и b удвоятся, то и разность между ими въ двое больше будетъ. Такъ когда $a-b=d$, то $2a$

$-2b$

$-2b=2d$ и вообще $na-nb=nd$, какое бы число мѣсто n взято ни было.

ГЛАВА II.

Объ ариѳметической пропорціи.

390.

Естьли два ариѳметическія содержанія равны будутъ между собою , то равенство сіе между ими называется *пропорція ариѳметическая.*

Такъ когда $a-b=d$ и $p-q=d$, то есть разность чиселъ p и q равна разности чиселъ a и b , то сіи 4 числа дѣлаютъ пропорцію ариѳметическую и пишутся $a-b=p-q$, чрезъ что ясно показывается , что разность между a и b столь же велика какъ, между p и q.

391.

По сему ариѳметическая пропорція состоитъ изъ 4 хъ членовъ, такого состоянія , что ежели второй членъ вы-

чтется изъ перваго, въ остаткѣ тому же числу выттти должно, какое когда четвертой вычтется изъ третьяго. Числа 12, 7, 9, 4 дѣлаютъ ариѳметическую пропорцію, потому что 12—7=9—4.

392.

Въ каждой ариѳметической пропорціи какъ $a-b=p-q$ естьли второй и третей члены переставятся, то будетъ также $a-p=b-q$, ибо когда $a-b=p-q$; то придай съ обѣихъ сторонъ b и будетъ $a=p-q+b$, потомъ вычти съ обѣихъ сторонъ p, то будетъ $a-b=b-q$ такъ когда 12-7=9-4, то будетъ такожде 12 -9=7-4.

393.

Въ каждой ариѳметической пропорціи можно поставить второй членъ мѣсто перваго, а 4 той мѣсто третьяго, и тогда будетъ $b-a=q-p$. Ибо $b-a$ есть отрицательное въ разсужденіи $a-b$, равнымъ образомъ $q-p$ отрицательное въ разсужденіи $p-q$. Такъ когда 12—7=9-4, то будетъ также 7-12=4 9.

394.

ВЪ каждой ариѳметической пропорцїи особливо примѣчать надлежитЪ, что сумма втораго и третьяго члена, всегда равна суммѣ перваго и четвертаго, что выговорить можно и такЪ: сумма крайнихЪ членовЪ равна суммѣ среднихЪ. ТакЪ когда $12-7=9-4$, то будетЪ $12+4=7+9$: ибо каждая сумма$=16$.

395.

Для доказательства сего важнаго свойства ариѳметической пропорцїи, пусть будетЪ $a-b=p-q$, придай сЪ обѣихЪ сторонЪ $b+q$, то получится $a+q=b+p$, то есть, сумма перваго и четвертого равна суммѣ втораго и третьяго члена. РавнымЪ образомЪ, когда 4 числа a,b,p,q будутЪ такого состоянїя, что сумма втораго и третьяго равна суммѣ перваго и четвертаго, т. е. $b+p=a+q$, то сїи числа безЪ сомнѣнїя будутЪ вЪ пропорцїи ариѳметической, то есть, $a-b=p-q$, ибо когда $a+q=b+p$, то вычти

съ обѣихъ сторонъ $b+q$ и произойдетъ $a-b=p-q$.

Когда числа 18,13,15,10 суть такого состоянія, что сумма среднихъ 13+15=28 равна суммѣ крайнихъ 18+10=28, то составятъ они пропорцію ариѳметическую, слѣдов. 18−13=15−10.

3,6.

Изъ сего свойства пропорціи можно легко разрѣшить слѣдующей вопросъ если если какой нибудь ариѳметической пропорціи даны будутъ три первыя члена, то какъ найти четвертой Пусть первыя 3 члена будутъ $a,b.p$, а мѣсто четвертаго искомаго напиши q, то получится $a+q=b+p$, вычти съ обѣихъ сторонъ a и произойдетъ $q=b+p-a$, по сему четвертой членъ находится, когда изъ суммы втораго и третьяго вычтешь первой. Положи наприм. 19 28,13 три первыя члена, то сумма втораго и третьяго =41 изъ нея вычтя первой 19 останется 22 величина четвертаго искомаго

маго члена, и пропорція ариѳметическая будетъ 19—28=13-22 или 28-19=22-13, или 28—22=19-13.

397.

Когда въ ариѳметической пропорціи второй членъ равенъ будетъ третьему, то оставшіяся 3 числа суть такого состоянія, что ежели изъ перваго вычтешь второй, остатки равны будутъ, ежели изъ втораго вычтешь третей, или разность между первымъ и вторымъ, равна будетъ разности между вторымъ и третьимъ. Такія три числа, суть 19, 15, 11, изо 19-15=15-11.

398.

Такія три числа идутъ въ ариѳметической прогрессіи, которая или ростетъ, ежели второй членъ столько больше перваго, чѣмъ третей превышаетъ второй, какъ въ семъ примѣрѣ: 4, 7, 10, или упадаетъ, когда числа равномѣрно уменьшаются какъ 9, 5, 1.

399.

Пусть числа a,b,c будутъ въ ариѳметической прогрессіи, то должно быть $a-b=b-c$, откуда по равенству крайнихъ и среднихъ членовъ слѣдуетъ $2b=a+c$, и когда съ обѣихъ сторонъ отнимется a, то получится $2b-a=c$.

400.

И такъ когда какой нибудь ариѳметической прогрессіи даны будутъ два первыя члена a и b, то найдется изъ нихъ третей, ежели изъ удвоеннаго втораго члена вычтется первой. Пусть будутъ 1 и 3 два первыя члена ариѳметической прогрессіи, то третей членъ равенъ будетъ $2.3-1=5$ и изъ чиселъ 1,3,5 будетъ сія пропорція $1-3=3-5$.

401.

По сему правилу, такъ какъ изъ перваго и втораго члена находили третей, можно также изъ втораго и третьяго найти четвертой, и такъ далѣе ариѳметическую прогрессію продолжать можно

жно. Пусть будетъ первой членъ a и вторый b, то третей будетъ $=2b-a$, четвертой $=4b-2a-b=3b-2a$ пятой $=6b-4a-2b+a=4b-3a$, шестой $=8b-6a-3b+2a=5b-4a$, седьмой $=10b-8a-4b+3a=6b-5a$ и такъ далѣе.

ГЛАВА. III.

О прогрессіи ариѳметической.

402.

Рядъ чиселъ, которыя всегда равномѣрно растутъ или уменьшаются, изъ сколькихъ бы членовъ оной ни состоялъ, называется *прогрессіею ариѳметическою*.

Такъ всѣ натуральныя числа по порядку написанныя какъ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 и протч. дѣлаютъ ариѳметическую прогрессію, потому что они всегда растутъ единицею; рядъ 25, 22, 19, 16, 13, 10, 7, 4, 1 и протч. дѣлаетъ также ариѳметическую прогрессію, поелику всѣ сіи числа 3 мя уменьшаются.

403.

Число, которымЪ ариѳметическая прогрессія ростетЪ или уменьшается, называется *разность* (differentia); и такЪ когда первой членЪ и разность даны будутЪ, то ариѳметическую прогрессію можно продолжать такЪ далеко, какЪ пожелаешь, наприм. пусть первой членЪ будетЪ 2, и разность 3, то прогрессія возрастающая будетЪ такая.

2,5,8,11,14,17,20,23,26.29,32 и протч. гдѢ каждой членЪ находится, придавая разность кЪ предЪидущему члену.

404.

НадЪ членами такой ариѳм. прогрессіи, пишутся натуральныя числа. 1,2,3,4 и протчая, дабы тотчасЪ увидѢть можно было, на которомЪ мѢстѢ каждой членЪ стоитЪ, и сіи вверьху написанныя числа *показателями* именуются. По сему прежней примѢрЪ, такЪ написать можно.

показ. 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
ариѳм. прогр. 2,5,8,11, 14,17,20,23,26,29
изъ чего видно, что 29 есть 10 той членъ.

405.

Пусть будетъ первой членъ a, разность d, то прогрессїя ариѳметическая выдетъ такая:

1 2 3 4 5 6 7
a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, $a+4d$, $a+5d$, $a+6d$
откуда легко каждой членъ найти можно, не имѣя нужды знать всѣ предъидущїя члены, изъ одного только перваго члена a и разности d, какъ напр. 10 той членъ будетъ $a+9d$, сотой$=a+99d$ и вообщее n той членъ$=a+(n-1)d$.

406.

Ежели прогрессїя ариѳметическая гдѣ нибудь перервется, то должно особливо наблюдать первой и послѣдней члены и показателя послѣдняго члена, которой показываетъ число членовъ. Такъ, когда первой членъ$=a$, разность$=d$ и число членовъ$=n$, то послѣдней членъ

будетъ

будетъ $=a+(n-1)d$, которой найдется ежели разность умножится на число членовъ, уменьшенное единицею и къ произведенію придается первой членъ, наприм. пусть будетъ ариѳметическая прогрессія состоящая изъ 100 членовъ, которой первой членъ $=4$, разность $=3$, то послѣдней ея членъ будетъ $99.3+4=301$.

407.

Когда даны первой членъ $=a$, послѣдней $=z$ и число членовъ $=n$, то изъ нихъ можно найти разность $=d$. Понеже послѣдней членъ $z=a+(n-1)d$, то вычти съ обѣихъ сторонъ a, и будетъ $z-a=(n-1)d$, и такъ когда изъ послѣдняго члена вычтется первой, останется разность умноженная на число членовъ единицею уменьшенное, или $z-a$ есть произведеніе $(n-1)d$; чего ради когда $z-a$, $=$ раздѣлится на $(n-1)$, то получится искомая разность d или $d=\frac{z-a}{n-1}$; отсюда произходитъ правило слѣдующее, изъ послѣдняго члена вычти первой, остатокъ раздѣли на число членовъ, уменьшенное единицею и получится

лучится разность, изЂ которой потомЂ всю прогрессїю дополнить можно.

408

Данной ариѳметической прогрессїи состоющей изЂ 9 членовЂ, вЂ которой первой членЂ 2 и послѢдней 26 найти разность. ВЂ семЂ случаѢ должно первой членЂ 2 вычесть изЂ послѢдняго 26 остатокЂ 24 раздѢлить на $9-1$, то есть, на 8, и получится разность $=3$, самая же прогрессїя будетЂ.

$$\overset{1}{2},\ \overset{2}{5},\ \overset{3}{8},\ \overset{4}{11},\ \overset{5}{14},\ \overset{6}{17},\ \overset{7}{20},\ \overset{8}{23},\ \overset{9}{26}.$$

Другой примѢрЂ. Пусть будетЂ первой членЂ $=1$ послѢдней 2, а число членовЂ $=10$, ищется ариѳметическая прогрессїя. ЗдѢсь разность будетЂ $\frac{2-1}{10-1}=\frac{1}{9}$, по чему искомая прогрессїя выдетЂ:

$$\overset{1}{1},\ \overset{2}{1\tfrac{1}{9}},\ \overset{3}{1\tfrac{2}{9}},\ \overset{4}{1\tfrac{3}{9}},\ \overset{5}{1\tfrac{4}{9}},\ \overset{6}{1\tfrac{5}{9}},\ \overset{7}{1\tfrac{6}{9}},\ \overset{8}{1\tfrac{7}{9}},\ \overset{9}{1\tfrac{8}{9}},\ \overset{10}{2}.$$

Третей примѢрЂ, Пусть будетЂ первой членЂ $2\frac{1}{3}$, послѢдней $12\frac{1}{2}$, а число членовЂ 7, отсюда получится разность

$\frac{12\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}}{7-1}=\frac{10\frac{1}{6}}{6}=\frac{61}{36}=1\frac{25}{36}$ слѣдовательно прогрессія будетъ:

$$\overset{1}{2\frac{1}{3}},\ \overset{2}{4\frac{1}{36}},\ \overset{3}{5\frac{13}{18}},\ \overset{4}{7\frac{5}{12}},\ \overset{5}{9\frac{1}{9}},\ \overset{6}{10\frac{29}{36}},\ \overset{7}{12\frac{1}{2}}.$$

409.

Ежели даны будутъ первой членъ a, послѣдній z, и разность d, то можно найти число членовъ n. Ибо когда $z-a=(n-1)d$, то раздѣли съ обѣихъ сторонъ на d, и произойдетъ $\frac{z-a}{d}=n-1$, а поелику n единицею больше нежели $n-1$, то будетъ $n=\frac{z-a}{d}+1$; слѣдовательно число членовъ найдется, когда разность перваго и послѣдняго члена раздѣлится на разность прогрессіи, и къ частному придастся единица.

Пусть будетъ наприм. первой членъ $=4$, послѣдней $=100$, и разность $=12$, то число членовъ будетъ $=9$, которые суть слѣдующіе:

$$\overset{1}{4},\ \overset{2}{16},\ \overset{3}{28},\ \overset{4}{40},\ \overset{5}{52},\ \overset{6}{64},\ \overset{7}{76},\ \overset{8}{88},\ \overset{9}{100}.$$

Пусть

ПустЪ будетЪ первой членЪ$=2$ послѢдней 6, и разность$=1\frac{1}{3}$, то число членовЪ будетЪ $\frac{4}{1\frac{1}{3}}+1=4$ которые суть

$\overset{1}{2}$, $\overset{2}{3\frac{1}{3}}$, $\overset{3}{4\frac{2}{3}}$, $\overset{4}{6}$.

Положимъ еще первой членЪ$=3\frac{1}{3}$ послѢдней $7\frac{2}{3}$, и разность$=1\frac{4}{9}$, то число членовЪ будетЪ $\frac{7\frac{2}{3}-3\frac{1}{3}}{1\frac{4}{9}}+1=4$,

которые будутЪ $\overset{1}{3\frac{1}{3}}$, $\overset{2}{4\frac{7}{9}}$, $\overset{3}{6\frac{2}{9}}$, $\overset{4}{7\frac{2}{3}}$.

410.

ЗдѢсь примѢчать надлежитЪ, что число членовЪ непремѢнно должно быть цѢлое число. СлѢдовательно ежели бы вЪ прежнемЪ примѢрѢ мѢсто *n* нашлася дробь, то бы сей вопросЪ совсѢмЪ не годился.

Ежели бы для $\frac{z-a}{d}$ не нашлося никакого цѢлаго числа, то бы сего вопроса рѢшить не можно было, и надлежало бы отвѢтствовать, что оной вопросЪ не возможенЪ. По сей притчинѢ вЪ такихЪ задачахЪ число $z-a$ должно дѢлиться на d

411.

Въ каждой ариѳметической прогрессіи 4 слѣдующіе вещи примѣчать надлежитъ.

1. первой членъ $=a$. 2. послѣдней $=z$
3. разность $=d$. 4 число членовъ$=n$,

которые всѣ суть такого состоянія, что естьли 3 которые нибудь изъ нихъ даны будутъ, можно опредѣлить четвертую.

Какъ 1. когда a, d и n извѣстны,

то будетъ $z=a+(n-1)d$

2 ---- z, d и n извѣстны

$a=z-(n-1)d$

3 ---- a, z, n извѣстны

$d=\frac{z-a}{n-1}$

4 ---- a, z и d извѣстны

$n=\frac{z-a}{d}+1$.

ГЛАВА

ГЛАВА IV.

О нахожденіи суммы ариѳметической прогрессіи.

412.

Когда предложена будетъ прогрессія ариѳметическая, то ищется иногда ея сумма; которая найдется сложивъ всѣ члены данной прогрессіи въ одно мѣсто. Но поелику сіе сложеніе медлительно бы было, ежели бы прогрессія изъ многихъ членовъ состояла, то можно найти правило, по которому сія сумма очень легко найдена быть можетъ. Что заразъ покажется.

413.

Разсмотримъ сперва одну опредѣленную прогрессію, какъ $\overset{1}{2}, \overset{2}{5}, \overset{3}{8}, \overset{4}{11}, \overset{5}{14}, \overset{6}{17}, \overset{7}{20}, \overset{8}{23}, \overset{9}{26}, \overset{10}{29}$, въ которой первой членъ $=2$, послѣдней $=29$, разность $=3$ и число членовъ $=10$. Въ сей прогрессіи сумма перваго и послѣдняго членовъ есть

31, сумма втораго и предпослѣдняго=31; сумма третьяго и втораго отъ послѣдняго=31, сумма 4 го и третьяго отъ послѣдняго=31 и такъ далѣе. Отсюда видно что каждыхъ двухъ членовъ отъ краевъ равно отстоящихъ сумма всегда одинака.

414.

Притчина сему очевидна, ибо когда первой членъ равенъ a, разность=d, послѣдней членъ=z, то сумма перваго и послѣдняго=$a+z$, потóмъ второй членъ $a+d$, и первой отъ послѣдняго =$z-d$, которые вмѣстѣ взятые дѣлаютъ $a+z$; третей членъ=$a+2d$ и второй отъ послѣдняго=$z-2d$ составятъ вмѣстѣ $a+z$, откуда истинна прежняго положенія явствуетъ.

415.

Дабы сыскать сумму прежней прогрессіи, то есть 2+5+8+11+14+17 +20+23+26+29, то напиши подъ нею туже сумую прогрессію наизворотъ,

и

и складывай членъ съ членомъ какъ слѣдуетъ:

$$\begin{array}{l} 2+5+8+11+14+17+20+23+26+29 \\ 29+26+23+20+17+14+11+8+5+2 \\ \hline 31+31+31+31+31+31+31+31+31+31 \end{array}$$

Сей найденной изъ равныхъ членовъ состоящей рядъ есть въ двое больше, нежели сумма нашей прогрессіи: число сихъ равныхъ членовъ есть 10, такъ какъ и въ прогрессіи, слѣд. сумма сего ряда будетъ $10.31=310$; но поелику они въ двое больше нежели сумма данной ариѳметической прогрессіи, слѣдовательно истинная сумма будетъ $=155$.

416.

Ежели подобнымъ образомъ поступать будешь съ каждою ариѳметическою прогрессіею, въ которой первой членъ$=a$, послѣдней $=z$ и число членовъ$=n$, то написавъ туже самую прогрессію, въ обратномъ порядкѣ подъ первою, и членъ съ членомъ сложивъ, получишь каждой членъ$=a+z$ числомъ n; слѣдовательно

сумма ихъ будетъ$=n(a+z)$, которая въ двое больше суммы прогрессiи , чего ради самая сумма прогрессiи ариѳм. будетъ$=\frac{n(a+z)}{2}$.

417.

Отсюда получаемъ мы для нахожденiя суммы каждой ариѳметической прогрессiи слѣдующее правило:

Умножь сумму перваго и послѣдняго члена прогрессiи на число членовъ , половина сего произведенiя покажетъ сумму всей прогрессiи.

Или , что все равно : умножь сумму перваго и послѣдняго члена на половину числа членовъ.

Или умножъ половину суммы перваго и послѣдняго членовъ , на цѣлое число членовъ , и получится сумма всей прогрессiи.

418.

Для изъясненiя сего правила надлежитъ предложить здѣсь нѣсколько примѣровъ. Пусть дана будетъ прогрессiя натуральныхъ чиселъ отъ 1 до 100 , найти

ти ея сумму. По первому правилу она будетЪ $\frac{100.101}{2}=50.101=5050$.

Спрашивается сколько всѣхЪ ударовЪ будетЪ вЪ 12 часахЪ. Сюда принадлежитЪ числа 1,2,3,4,5,6.7, до 12, которыхЪ сумма будетЪ $\frac{12.13}{2}=6.13=78$.

Ежели бы надобно было знать сумму того же ряда чиселЪ до 1000, то будетЪ оная $=500500$, а до 10000 она будетЪ $=5000\,5000$.

419.

ВопросЪ. НѣктоЪ покупаетЪ лошадь сЪ такимЪ договоромЪ, чтобы за первой подковной гвоздь заплатить ему 5 копѣекЪ, за другой 8 коп., а за третей 11 и такЪ далѣе, за каждой слѣдующей гвоздь по три копѣйки больше, всѣхЪ же гвоздей было 32: сколь дорога стала ему лошадь?

Здѣсь ищется сумма ариѳметической прогрессіи, вЪ которой первой членЪ $=5$, разность $=3$ число членовЪ $=32$.

Сыщи сперва послѣдней членъ, которой по выше сего данному правилу найдется $=5+31.3=98$, а изъ сего уже искомая сумма будетъ $=\frac{103.32}{2}=103.16$. и такъ лошадь стоять будетъ 1648 копѣекъ, или 16 рублей 48 коп.

420.

Пусть будетъ вообще первой членъ $=a$, разность $=d$ и число членовъ $=n$, найти сумму всей прогрессіи. Понеже послѣдней членъ долженъ быть $=a+(n-1)d$, то сумма перваго и послѣдняго $=2a+(n-1)d$, которую умножа на число членовъ получишь $2na+n(n-1)d$, и искомая сумма будетъ $=na+\frac{n(n-1)d}{2}$.

Когда въ первомъ примѣрѣ было $a=5$, $d=3$, $n=32$, то по сей формулѣ будетъ сумма $=5.32+\frac{32.31.3}{2}=160+1488=1648$ какъ и прежде.

421.

Ежели должно будетъ найти сумму ряда натуральныхъ чиселъ отъ 1 до n, то въ семъ примѣрѣ первой членъ

будетъ

будетъ $=1$, послѣдней $=n$, и число членовъ также n, по чему сумма $=\frac{nn+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$.

Ежели n положится 1766, то сумма всѣхъ членовъ отъ 1 до $1766=883.1767=1560261$.

422.

Данной прогрессiи нечетныхъ чиселъ 1,3,5,7 и проч. продолжающейся до числа членовъ n найти сумму.

Въ сей прогрессiи первой членъ $=1$ разность $=2$, число членовъ $=n$, потому послѣдней членъ будетъ $1+(n-1)2=2n-1$, а искомая сумма $=nn$.

И такъ здѣсь должно только число членовъ умножить само на себя. Того ради, сколько бы членовъ такой прогрессiи ни требовалось сложить въ одну сумму, то она всегда равна будетъ квадрату числа членовъ, какъ изъ слѣдующаго явствуетъ:

Прогр. — 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 и прот.
Сумма — 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 и про
Члены — 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 и про.

423.

Пусть еще будетъ первой членъ $=1$, разность$=3$ число членовъ$=n$, то прогрессія выдетъ такая 1,4,7,10,13 и протч. въ которой послѣдней членъ$=1+(n-1)3=3n-2$, сумма перваго и послѣдняго$=3n-1$, слѣд. сумма прогрессіи $=\frac{n(3n-1)}{2}=\frac{3nn-n}{2}$; и ежели n положится 20 то сумма будетъ $10.59=590$.

424.

Положимъ первой членъ$=1$, разность$=d$, число членовъ$=n$, то послѣдней членъ будетъ$=1+(n-1)d$, сумма перваго и послѣдняго$=2+(n-1)d$, сіе умноживъ на число членовъ выдетъ$2n+n(n-1)d$, и сумма всей прогрессіи$=\frac{2n+n(n-1)d}{2}=n+\frac{n(n-1)d}{2}$.

Присовокупимъ еще здѣсь слѣдующую табличку.

когда $d=1$ то сумма прогрессіи будетъ $n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{nn+n}{2}$

$d=2$ — — — — — — $n+\frac{2n(n-1)}{2}=nn$

$d=3$ — — — — — — $n+\frac{3n(n-1)}{2}=\frac{3nn-n}{2}$

$d=4$ — — — — — — $n+\frac{4n(n-1)}{2}=2nn-n$

$d=5$ — — — — — — $n+\frac{5n(n-1)}{3}=\frac{5nn-3n}{2}$

$d=6$ — — — — — — $n+\frac{6n(n-1)}{2}=3nn-2n$

$d=7$ — — — — — — $n+\frac{7n(n-1)}{2}=\frac{7nn-5n}{2}$

$d=8$ — — — — — — $n+\frac{8n(n-1)}{2}=4nn-3n$

$d=9$ — — — — — — $n+\frac{9n(n-1)}{2}=\frac{9nn-7n}{2}$

$d=10$ — — — — — — $n+\frac{10n(n-1)}{2}=5nn-4n$

ГЛАВА V.

О фигурныхъ или многоугольныхъ числахъ.

425.

Слаганіе въ одну сумму арифметической прогрессіи, которая отъ 1 начинается, а разность имѣетъ или 1, или 2, или 3, или какое нибудь другое по изволенію взятое

взятое число, ведетъ насъ къ познанію фигурныхъ чиселъ, кои произходятъ, когда нѣкоторые члены такой прогрессіи вмѣстѣ складываются.

426.

Когда положится разность $=1$, между тѣмъ первой членъ всегда долженъ быть 1, то произойдетъ оттуда слѣдующая ариѳметическая прогрессія 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 и протч. и ежели въ сей прогрессіи возьмутся суммы 2 хъ, 3 хъ, 4 хъ. и протч. членовъ, то произойдетъ оттуда слѣдующей рядъ чиселъ.

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78 и пр. такъ что $1=1$. $3=1+2$, $6=1+2+3$, $10=1+2+3+4$ и такъ далѣе; и сіи числа называются *треугольные числа*, потому что столько точекъ, сколь велики такіе числа будутъ, представить можно въ треугольникахъ. Какъ

1, 3, 6, 10

15, 21 и такъ далѣ

427.

Въ каждомъ изъ сихъ треугольниковъ видно сколько точекъ въ каждомъ боку содержится; въ первомъ только одна, во второмъ 2, въ третьемъ 3, въ четвертомъ 4 и такъ далѣе. Слѣдовательно отъ числа точекъ въ каждомъ боку содержащихся зависятъ треугольные числа, или число всѣхъ пунктовъ, которые просто треугольниками называются.

Сторона

Сторона. ., . . ., ..., ...,
Треугольникъ. . . . .
. . . .
. . . . .
.

сторон. . . . . . . ,
треугольн. . . . . . .
. . . . .
. . . .
. . .
. .
.

428.

И такъ спрашивается здѣсь, какимъ образомъ изъ даннаго боку найти треугольникъ, что помощїю вышепоказанныхъ правилъ легко учиниться можетъ: ибо пусть будетъ данная сторона треугольника n, то самой треугольникъ будетъ $1+2+3 \ldots +n$, то есть сумма $=\frac{nn+n}{2}$; и ежели $n=1$, треугольникъ $=1$

буде же $n=2$, то треугольникъ $=3$
$n=3$ — — — — — $=6$
$n=4$ — — — — — $=10$
и такъ далѣе.

и когда $n=100$, то треугольникъ $=5050$

419.

429.

Сія формула $\frac{nn+n}{2}$ называется генеральною формулою всѣхъ треугольныхъ чиселъ; ибо по оной для каждаго бока n треугольное число сыскать можно.

Оная формула можетъ изъявлена быть и такимъ образомъ $\frac{n(n+1)}{2}$, которая много служитъ къ облегченію выкладки; потому, что n или $n+1$ всегда будетъ четное число, и слѣдовательно дѣлится на 2.

Такъ когда $n=12$, то треугольникъ $=\frac{\overset{6}{12}.13}{2}=6.13=78$. или когда $n=15$, то треугольникъ $=\frac{15.\overset{8}{16}}{2}=15.8=120$.

и такъ далѣе.

430.

Ежели разность положится $=2$, то произойдетъ слѣдующая прогрессія 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 и протч. и суммы ея будутъ.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 и пр. которые числа называются *четыреуголь-*

ныя

ныя числа, и суть тѣ же самые, которые мы прежде квадратами назвали: ибо столько точекъ, сколько велико сїе число, можно поставить въ четыреугольникъ, такъ:

1,	4,	9,	16,	25
.	. .	. . .		. . . . . .
	. .	. . .		. . . . . .
		. . .		. . . . . .
				. . . . . .
				. . . . . .

431.

Здѣсь видно, что бокъ такого четыреугольника, столько содержитъ въ себѣ точекъ, сколь великъ его квадратной корень: слѣдовательно стороны 5, четыреугольникъ 25, стороны 6, четыреугольникъ 36; и вообще ежели сторона будетъ n, которымъ число членовъ прогрессїи 1, 3, 5, 7 и протч. означается, то четыреугольникъ будетъ сумма всѣхъ оныхъ членовъ, которая найдена прежде $= nn$; но о семъ четыреугольникѣ или квадратѣ говорено уже выше сего пространнѣе.

432.

Ежели положится разность прогрессіи $=3$, и равнымЪ образомЪ, какЪ и прежде возьмутся суммы, то сіи будутЪ *числа пятиугольныя*, хотя точками ихЪ представить и не можно.

Оныя идутЪ вЪ слѣдующемЪ порядкѣ:

показатель	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,
ариѳм. прогр.	1,	4,	7,	10,	13,	16,	19,	22,
пятиугольник.	1,	5,	12,	22,	35,	51,	70,	92,

показатель означаетЪ бокЪ пятиугольника:

433.

И такЪ когда сторона положится n, то пятиугольное число будетЪ $=\frac{3nn-n}{2}$; напр. когда $n=7$, то пятиугольникЪ будетЪ $=70$; ежели же кто похочетЪ знать пятиугольное число, котораго сторона $=100$, то положи $n=100$ и получишь 14950 искомое пятиугольное число.

434.

Когда разность прогрессіи будетЪ 4, то изЪ оныя получатся шестиугольныя числа, которыхЪ порядокЪ такой:

 показ.

показ. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,
пр. ар. 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37,
6тиуг. 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153, 190,
гдѣ показатели означаютъ какъ и прежде сторону шестиугольника.

435.

Такимъ образомъ ежели данная сторона будетъ $=n$, то 6тиугольникъ $=2nn-n$; причемъ примѣчать надлежитъ, что всѣ сіи 6тиугольныя числа вмѣстѣ суть и треугольныя; ибо когда въ треугольныхъ числахъ всегда станешь переступать черезъ число, то получишь 6тиугольныя.

436.

Подобнымъ образомъ находятся 7, 8, 9 и 10 тиугольныя числа, для коихъ мы здѣсь общую формулу предлагаемъ. Положа сторону $=n$ выдутъ

треугольникъ $= \frac{nn+n}{2}$

4 угольникъ $= \frac{2nn+0n}{2} = nn$

5 угольникъ $= \frac{3nn-n}{2}$

6 уголь-

6 угольникъ $= \frac{4nn - 2n}{2} = 2nn - n$

7 угольникъ $= \frac{5nn - 3n}{2}$

8 угольникъ $= \frac{6nn - 4n}{2} = 3nn - 2n$

9 угольникъ $= \frac{7nn - 5n}{2}$

10 угольникъ $= \frac{8nn - 6n}{2} = 4nn - 3n$

11 угольникъ $= \frac{9nn - 7n}{2}$

12 угольникъ $= \frac{10nn - 8n}{2} = 5nn - 4n$

20 угольникъ $= \frac{18nn - 16n}{2} = 9nn - 8n$

25 угольникъ $= \frac{23nn - 21n}{2}$

m угольникъ $= \frac{(m-2)nn - (m-4)n}{2}$

437.

И такъ когда данъ будетъ бокъ n, то найдется вообще m угольникъ $= \frac{(m-2)nn - (m-4)n}{2}$, изъ которой формулы всѣ возможныя многоугольныя числа найти можно, положа сторону ихъ $= n$.

Ежели бы хотѣлъ кто по сей формулѣ найти двуугольное число, то было бы $m=2$, а число двуугольное $=n$

Ежели будетъ $m=3$, то треугольное число $=\frac{nn+n}{2}$, или ежели $m=4$, то четыреугольное число $=nn$, и такъ далѣе.

438.

Что бы изъявить правило сіе примѣрами, то ищи 25угольное число, коего сторона $=36$; найди сперва бока и 25угольное число, которое будетъ $=\frac{23nn-21n}{2}$, теперь положи $n=36$ и искомое число будетъ $=14526$.

439.

Вопросъ. Нѣкто купилъ себѣ домъ и спрашивается, сколь дорого онъ за нево заплатилъ? на то онъ отвѣтствуетъ, что число рублей, которое онъ за нево далъ есть 365 угольное число 12. при

При

При рѣшеніи сего вопроса $m=365$ и слѣдовательно 365 угольное число бока n будетъ $\frac{363nn-361n}{2}$; но $n=12$, по чему искомая цѣна дома$=23970$ рублей.

ГЛАВА VI.

О содержаніи геометрическомъ.

440.

Геометрическое содержаніе двухъ чиселъ бываетъ при вопросѣ, во сколько разъ одно число больше другаго; и ежели одно изъ сихъ двухъ чиселъ раздѣлится на другое, то частное оттуда произшедшее называется *знаменатель* сего содержанія.

441.

Въ геометрическомъ содержаніи належитъ разсмотрѣть три вещи: I.) изъ данныхъ двухъ чиселъ первое, которое предъидущимъ членомъ именуется, II.) другое изъ данныхъ послѣдующимъ членомъ называемое, III.) знаменатель содер-

жанія, которой находится чрезъ дѣленіе предъидущаго члена на послѣдующей. Такъ когда между двумя числами 18 и 12 должно будетъ опредѣлить ихъ содержаніе, то 18 будетъ предъидущей, 12 послѣдующей члены, а знаменатель $\frac{18}{12}=1\frac{1}{2}$; откуда познается, что предъидущей членъ содержитъ въ себѣ послѣдующей полтора раза.

442.

Для означенія геометрическаго содержанія между двумя числами употребляются двѣ другъ надъ другомъ стоящіе точки, которые ставятся между предъидущимъ и послѣдующимъ членами.

Такъ $a:b$ означаетъ содержаніе между a и b, коимъ знакомъ, какъ уже выше сего упомянуто, означаютъ также и дѣленіе; и для сей самой притчины онъ здѣсь употребляется: ибо что бы узнать величину сего содержанія, должно число а раздѣлить на b; а словами

сей

сей знакъ изображается такъ : *a* содержится къ *b* или просто *a* къ *b*.

443.

Знаменатель сего содержанія означается дробью , въ которой числитель есть предъидущей членъ , а знаменатель послѣдующей. А для ясности дробь сію изображать надлежитъ малыми числами , что учинится , когда числитель и знаменатель раздѣлятся на самаго большаго общаго дѣлителя , какъ выше сего учинено было , когда дробь $\frac{18}{12}$ приведена была въ $\frac{3}{2}$ числителя, а знаменателя раздѣля на 6.

444.

Сіи содержаніи разнятся по различности ихъ знаменателей , и посему можетъ быть ихъ столько родовъ , сколько различныхъ знаменателей найти можно.

Первой ихъ родъ безспорно долженъ быть когда знаменатель $=1$; а сіе учинится когда оба числа равны будутъ:

какъ 3 : 3, ибо сихъ чиселъ знаменатель $=1$, и для того содержаніемъ равенства называется. По семъ слѣдуютъ тѣ роды содержанія, въ которыхъ знаменатели суть цѣлые числа какъ 4 : 2, гдѣ знаменатель 2; 12 : 4 имѣетъ знаменателя 3; а 24 : 6 знаменатель его $=4$ и протч, и напослѣдокъ тѣ содержаніи коихъ знаменатели суть не цѣлые числа но дроби, какъ 12 : 19 котораго знаменатель $\frac{4}{3}$ или $1\frac{1}{3}$.

445.

Пусть будетъ a предъидущей членъ, b послѣдующей, а знаменатель $=d$, то уже мы видѣли, что изъ данныхъ a и b найдется $d=\frac{a}{b}$.

Естьли же данъ будетъ послѣдующей b и знаменатель d, то предъидущей найдется $a=bd$, потому что bd раздѣленное на b даетъ d, и наконецъ когда данъ будетъ предъидущей членъ a и знаменатель d, то послѣдующей будетъ $=b=\frac{a}{d}$: ибо когда предъидущей a раздѣлится

дѣлится на послѣдующей $\frac{a}{d}$, то частное дастъ знаменателя d.

446.

Каждое содержаніе какъ $a : b$ не перемѣнится, ежели предъидущей и послѣдующей члены на одно число помножатся или раздѣлятся: потому что знаменатель его будетъ то же самое число. Наприм. когда d есть знаменатель содержанія $a : b$, такъ что $d = \frac{a}{b}$, то будетъ также содержанія $na : nb$ знаменатель $\frac{a}{b} = d$; равнымъ образомъ содержанія $\frac{a}{n} : \frac{b}{n}$ знаменатель $\frac{a}{b} = d$ тотъ же самой, какой былъ и въ данномъ содержаніи.

447.

Ежели знаменатель содержанія самыми малыми числами изобразится, то сіе содержаніе можно будетъ выразить словами очень ясно; а имянно ежели знаменатель приведется въ дробь $\frac{p}{q}$, то говорятъ $a : b = p : q$. Такъ содержанія $6 : 3 = 2 : 1$, равнымъ образомъ

18 : 12=3 : 2 ; 24 : 18=4 : 3 и 30 : 45 =2 : 3 ; ежели же знаменателя сократить не льзя будетъ, то и содержанія ясняе изъявить не можно : ибо ежели скажется 9 : 7=9 : 7, то отъ сего не прибудетъ ни малой ясности.

448.

Ежели же знаменателя изъявить можно будетъ въ самыхъ малыхъ числахъ, то чрезъ сіе получится ясное понятіе о содержаніи двухъ весьма большихъ чиселъ. Такъ когда скажется 288 : 144=144 : 72 или =72 : 36=36 : 18 или=18 : 9=6 : 3 или=2 : 1, то сіе содержаніе будетъ совсѣмъ вразумительно, и ежели спросится, какъ 105 : 70 содержится, то отвѣтствуется какъ 3 : 2; когда же опять спросятъ какъ 576 : 252 содержатся, отвѣтствуется какъ 16 : 7.

449.

И такъ чтобы каждое содержаніе наияснѣйшимъ образомъ представить можно было, то знаменателя онаго стараться должно изъявить самыми малыми

числами

числами, что учинится, когда оба члена содержанїя на самаго большаго общаго ихъ дѣлителя раздѣлятся. Такъ содержанїе 576 : 252 вдругъ превратится въ 16 : 7, когда оба числа 576 и 252 на 36, какъ на самаго большаго общаго ихъ дѣлителя раздѣлятся.

450.

Понеже главное дѣло здѣсь состоитъ въ томъ, какимъ образомъ данныхъ двухъ чиселъ найти самаго большаго общаго дѣлителя, то въ слѣдующей главѣ преподано будетъ надлежащее къ тому наставленїе.

ГЛАВА VII.

О большемъ общемъ дѣлителѣ двухъ данныхъ чиселъ.

451.

Есть числа, которые кромѣ 1 никакого другаго общаго дѣлителя не имѣютъ, и

и когда числитель и знаменатель какой ни будь дроби будутъ такого состоянія, то не можно и сократить оныя; и такъ видно что два числа 48 и 35 не имѣютъ ни какого общаго дѣлителя, не смотря на то, что каждое изъ нихъ особливаго дѣлителя имѣетъ. Для сей причины содержанія 48 : 35 простяе изъявить не можно, ибо хотя они оба дѣлятся на 1, но отъ сего дѣленія числа ни мало не уменьшатся.

452.

Ежели же числа имѣютъ общаго дѣлителя, то оной, и притомъ самой большой найдется по слѣдующему правилу.

Раздѣли большее число на меньшее, на остатокъ отъ сего дѣленія раздѣли прежняго дѣлителя, на сей остатокъ раздѣли послѣдняго дѣлителя, и симъ образомъ дѣленіе продолжай до тѣхъ поръ, пока въ остаткѣ ни чего не будетъ, и послѣдней дѣлитель будетъ

самой

самой большой общей дѣлитель обоихъ данныхъ чиселъ.

Сіе разысканіе данныхъ чиселъ 576 252 будетъ такое:

```
252 |576| 2
    |504|
    -------
      72 |252| 3
         |216|
         -------
          36 |72| 2
             |72|
             ----
```

Слѣдовательно самой большей общей дѣлитель, сихъ двухъ чиселъ есть 36.

453.

Для изъясненія сего правила не безнужно здѣсь предложить нѣсколько примѣровъ. Чего ради ищи самаго большаго общаго дѣлителя чиселъ 504 и 312 такъ:

```
312|504|1
   |312|
     192|312|1
        |192|
          120|192|1
             |120|
               72|120|1
                 | 72|
                   48|72|1
                     |48|
                      24|48|2
                        |48|
```

Слѣд. 24 есть самой большей общей дѣлитель, почему содержаніе 504 : 312 перемѣнится въ 21 : 13.

454.

Пусть даны будутъ еще два числа 625 и 529, коихъ сыскать надлежитъ самаго большаго общаго дѣлителя:

```
529|625|1
   |529|
   -----
     96|529|5
       |480|
       -----
         49|96|1
           |49|
           ----
            47|49|1
              |47|
              ----
                2|47|23
                 |4 |
                 ----
                   7
                   6
                 ----
                   1|2|2
                    |2|
```

Здѣсь самой большой общей дѣлитель будетъ 1, почему содержанiе 625 : 529 сократиться не можетъ, или его ни въ какихъ меньшихъ числахъ изъявить не льзя.

455.

Теперь надлежитъ еще доказать сiе правило. Пусть будетъ a большее а b меньшее число изъ данныхъ, d общей ихъ

ихъ дѣлитель; и поелику какъ a, такъ и b дѣлятся на d, то можетъ также и $a-b$ на него раздѣлиться, подобнымъ образомъ $a-2b$, $a-3b$ и вообще $a-nb$.

457.

При семъ примѣчать надлежитъ, что ежели d есть самой большей общей дѣлитель чиселъ b и $a-nb$, то онъ же будетъ самой большей общей дѣлитель чиселъ b и a: ибо когда бы для чиселъ a и b нашелся еще большей общей дѣлитель нежели d, то бы онъ былъ также общей дѣлитель чиселъ b и $a-nb$, слѣд. d не былъ бы самой большой дѣлитель; но здѣсь d есть самой большой общей дѣлитель, слѣд. онъ же долженъ быть самой большой чиселъ a и b.

458.

Предложивъ сіи три положенія, раздѣлимъ большее число a на меньшее b, какъ самое правило повелѣваетъ, а мѣсто частнаго возмемъ n, остатокъ будетъ

детъ $a-nb$, которой всегда меньше нежели b; ежели сей остатокъ $a-nb$, съ дѣлителемъ b того общаго дѣлителя имѣетъ, какъ данныя числа a и b, то раздѣли прежняго дѣлителя b на остатокъ $a-nb$, и произшедшей отсюда остатокъ съ предъидущимъ дѣлителемъ опять будетъ имѣть одного общаго дѣлителя, и такъ далѣе.

459.

Симъ образомъ продолжается пока дѣленіе не кончится, или покуда въ остаткѣ ничего не будетъ. Пусть будетъ послѣдней дѣлитель p, которой точно нѣсколько разъ въ своемъ дѣлимомъ содержится, и для того дѣлимое на p дѣлится, и имѣть будетъ форму mp. Сіи числа p и mp оба могутъ дѣлиться на p, и подлинно другаго общаго дѣлителя не имѣютъ, потому что никакое число на большее, нежели оно само раздѣлиться не можетъ. По сей причинѣ послѣдней дѣлитель будетъ самой большой общей дѣлитель съ начала предло-

женныхъ чиселъ a и b; и симъ образомъ предписанное правило доказывается.

460.

Предложимъ еще примѣръ и станемъ искать самаго большаго общаго дѣлителя чиселъ 1728 и 2304; выкладка будетъ слѣдующая :

```
1728 | 2304 | 1
     | 1728 |
       ----
        576 | 1728 | 3
            | 1728 |
```

И такъ 576 есть самой большой общей дѣлитель, и содержанїе 1728 : 2304 перемѣнится въ 3 : 4 слѣдовательно 1728 : 2304 = 3 : 4.

ГЛАВА VIII.

О пропорцїи геометрической.

461.

Два геометрическїя содержанїя между собою равны, когда ихъ знаменатели

равны

равны; а равенство такихъ двухъ содержанiй *пропорцiею геометрическою* называется и пишется такъ $a:b=c:d$, а выговаривается a содержится къ b такъ какъ c къ d; примѣръ сей пропорцiи есть $8:4=12:6$: ибо содержанiя $8:4$ знаменатель $=\frac{2}{1}$, и содержанiя $12:6$ также $\frac{2}{1}$.

462.

И такъ когда $a:b=c:d$ есть пропорцiя геометрическая, то съ обѣихъ сторонъ знаменатели должны быть одинакiе, и слѣдовательно $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, и обратно когда дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ равны между собою, то $a:b=c:d$.

463.

По сему геометрическая пропорцiя состоять должна изъ 4 членовъ такого свойства, что естьли первой раздѣлится на второй, столькожъ въ частномъ выйти должно, когда третей раздѣлится на четвертой. Откуда слѣдуетъ самое важное свойство геометрической пропорцiи состоящее въ томъ,

что произведеніе изъ перваго и четвертаго членовъ равно произведенію изъ втораго и третьяго, или короче произведеніе крайнихъ равно произведенію среднихъ членовъ.

464.

Для доказательства сего свойства пусть будетъ геометрическая пропорція $a:b=c:d$, и слѣдовательно $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, умножь каждую изъ сихъ дробей на b, то получится $a=\frac{bc}{d}$, потомъ умножь еще съ обѣихъ сторонъ на d, и будетъ $ad=bc$; но ad есть произведеніе крайнихъ а bc произведеніе среднихъ членовъ, которыя оба равны между собою.

465

Когда же 4 числа a, b, c, d будутъ такого состоянія, что произведеніе крайнихъ ad равно произведенію среднихъ bc, то сіи числа будутъ въ пропорціи геометрической: ибо когда $ad=bc$, то раздѣли съ обѣихъ сторонъ на bd и получится $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, и по сему $a:b=c:d$.

466.

Четыре члена геометрической пропорціи, яко $a : b = c : d$ переставлены быть могутъ разными образами, такъ что они всегда будутъ пропорціональны, и все дѣло въ томъ только состоитъ, чтобъ произведеніе крайнихъ равно было произведенію среднихъ членовъ, или чтобъ $ad = bc$, и по сему будетъ вопервыхъ $b : a = d : c$ II) $a : c = b : d$; III) $d : b = c : a$ IV) $d : c = b : a$.

467.

Сверьхъ сего можно еще вывесть множество другихъ геометрическихъ пропорцій: ибо когда $a : b = c : d$, то вопервыхъ будетъ первой со вторымъ $a + b$ къ первому a, такъ какъ третей съ четвертымъ $c + d$ къ третьему с, т. е $a + b : a = c + d : c$; потомъ такожде первой безъ втораго $a - b$ къ первому a такъ третей безъ четвертаго $c - d$ къ третьему c, или $a - b : a = c - d : c$; ибо когда возмутся произведенія крайнихъ и среднихъ членовъ,

то будетъ $ac-bc=ac-ad$, потому что $ad=bc$, и $a-b:b=c-d:d$, гдѣ $ad-bd=bc-bd$, потому что $ad=bc$.

468.

Такіе изъ $a:b=c:d$ выведенные пропорціи могутъ вообще переставлены быть такъ: $ma+nb:pa+qb=mc+nd:pc+qd$, ибо произведеніе крайнихъ есть $mpac+npbc+mqad+nqbd$ или понеже $ad=bc$, то оное будетъ $mpac+npbc+mqbc+nqbd$, а произведеніе среднихъ $mpac+mqbc+npad+nqbd$, или понеже $ad=bc$, то будетъ оно $mpac+mqbc+npbc+nqbd$, которое съ прежнимъ во всемъ сходно.

469.

Такимъ образомъ изъ данной какой нибудь пропорціи $6:3=10:5$ безконечное множество другихъ вывесть можно, изъ коихъ нѣкоторые здѣсь предлагаемъ.

$3:6=5:10$, $6:10=3:5$, $9:6=15:10$,
$8:3=5:5$, $9:15=3:5$, $9:3=15:5$

470.

470.

Когда въ каждой геометрической пропорціи произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ, то изъ данныхъ трехъ первыхъ членовъ можно найти четвертой; пусть будутъ 3 первые члена 24 : 15 = 40 :.. Понеже произведеніе среднихъ членовъ въ семъ примѣрѣ есть 600, то четвертый членъ умноженной на первой т. е. на 24 долженъ произвесть также 600, слѣдовательно 600 на 24 раздѣлить надлежитъ, частное дастъ искомой четвертой членъ; по чему выдетъ сія пропорція 24 : 15 = 40 : 25, и естьли вообще первые три члена будутъ $a : b = c$: —, то поставь на мѣсто неизвѣстнаго четвертаго члена букву d, и тогда должно быть $ad = bc$, раздѣливъ теперь съ обѣихъ сторонъ на a получится $d = \frac{bc}{a}$; слѣдовательно четвертой членъ $= \frac{bc}{a}$, и находится, когда второй умножится на третей и произведеніе раздѣлится на первой.

471.

На семъ основано изящное ариѳметическое правило тройнсе: ибо въ немъ изъ данныхъ трехъ чиселъ ищется такое четвертое, которое съ протчими въ геометрической пропорціи находится, такъ что первой содержится ко второму, какъ третей къ четвертому.

472

При семъ нѣкоторыя особливыя обстоятельства примѣчать надлежитъ, а имянно: когда въ двухъ пропорціяхъ первые и третьи члены одинаковы, какъ то въ сихъ $a:b=c:d$ и $a:f=c:g$, то будутъ такожде вторые и четвертые члены между собою пропорціональны, т. е. тогда будетъ $b:d=f:g$: ибо когда изъ первой слѣдуетъ $a:c=b:d$ а изъ другой $a:c=f:g$, то содержанія $b:d$ и $f:g$ между собою равны, потому что каждое изъ нихъ равно содержанію $a:c$, и посему когда $5:100=2:40$ и $5:15=2:6$, то слѣдуетъ оттуда $100:40=15:6$.

473.

Естьли же двѣ пропорціи будутъ такого состоянія, что средніе въ нихъ члены будутъ одинаки, тогда первые члены находятся въ обратномъ содержаніи четвертыхъ, а имянно когда $a:b=c:d$ и $f:b=c:g$, то слѣдуетъ оттуду $a:f=g:d$. Пусть будетъ наприм. дана сія пропорція $24:8=9:3$ и $6:8=9:12$, то выдетъ изъ того слѣдующая $24:6=12:3$, притчина сему довольно видна, потому что первая пропорція даетъ $ad=bc$, а другая $fg=bc$, слѣдовательно $ad=fg$ и $a:f=g:d$ или $a:g=f:d$.

474.

Изъ данныхъ двухъ пропорцій можно всегда одну новую сдѣлать, когда первые, вторые, третьи, и четвертые члены помножатся между собою порознь. Такъ изъ сихъ пропорцій $a:b=c:d$ и $e:f=g:h$, ибо изъ первой $ad=bc$. а изъ второй $eh=fg$, то будетъ также $adeh=bcfg$; но $adeh$ есть произведеніе крайнихъ а

$bcfg$ произведеніе среднихъ въ новой пропорціи, которые между собою равны.

475.

Пусть будутъ даны сіи двѣ пропорціи 6 : =15 : 10 и 9 : 12=15 : 20, то составленіе оныхъ даетъ намъ слѣдующую пропорцію 6.9 : 4.12=15.15 : 10.20
т. е. 54 : 48 =225 : 200
или 9 : 8 = 9 : 8

476.

Напослѣдокъ здѣсь еще примѣчать надлежитъ, что ежели два произведенія между собою равны какъ $ad=bc$, то изъ нихъ можно опять сдѣлать геометрическую пропорцію: ибо завсегда будетъ одинъ множитель перваго произведенія, къ одному втораго произведенія, такъ другой множитель втораго ко второму перваго произведенія, а имянно: $a:c=b:d$, когда на прим. 3.8=4.6, то выходитъ оттуда сія пропорція 8 : 4 =6 : 3 или 3 : 4=6 : 8; а когда 3.5=1.15, то будетъ 3 : 15=1 : 5 или 5 : 1=15 : 3 или 3 : 1=15 : 5.

ГЛАВА

ГЛАВА IX.

Изъясненіе пропорцій.

477.

Сіе ученіе столь нужно въ общемъ житіи, что безъ него никогда почти обойтись не льзя; ибо цѣны и товары всегда между собою пропорціональны, и при разныхъ родахъ денегъ главное дѣло состоитъ въ томъ, чтобы опредѣлить между ими содержаніе. И такъ не безнужно будетъ здѣсь изъяснить предложенныя наставленія и показать употребленіе оныхъ.

478.

Ежели потребуется сыскать содержаніе между двумя родами монетъ, наприм. между люидоромъ и червонцомъ, то должно смотрѣть чего каждая изъ нихъ стоитъ въ какомъ нибудь третьемъ родѣ монеты, такъ въ берлинѣ люидоръ стоитъ 5 талеровъ и 8 грошей, а червонецъ 3 талера, то приведи

ди только сїи деньги вЪ одинЪ родЪ монетЪ, т. е. или вЪ талеры; и тогда будетЪ сїя пропорцїя 1 люидорЪ : 1 червонцу $=5\frac{1}{3}$ талер. : 3 тал или $=16:9$; или вЪ гроши, то выдетЪ сїя пропорцїя: 1 люид. 1 черв $=128:72=16:9$, и изЪ такой пропорцїи получится содержанїе между люидоромЪ и червонцомЪ, а для равенства крайнихЪ и среднихЪ членовЪ будутЪ 9 люид $=16$ черв. Помощїю сего сравненїя каждую сумму люидоровЪ обратишь вЪ червонцы. такЪ когда спросится, 1000 люидор. сколько дѣлаютЪ червонцовЪ? то дѣлается сїе тройное правило 9 люид. дѣлаютЪ 16 черв. сколько 1000 люид.? отвѣтЪ $1777\frac{7}{9}$ черв. естьли же вопросЪ будетЪ : 1000 черв. сколько составятЪ люидоровЪ? тогда дѣлается сїе тройное правило : 16 черв. дѣлаютЪ 9 люид. сколько 1000 черв.? имѣютЪ $562\frac{1}{2}$ люидора.

479.

ЗдѣсьвЪ ПетербургѢ цѣна червонца перемѣняется по вексельному курсу, по которому цѣна рубля вЪ Голланд-

скихЪ

скихъ штиверахъ опредѣляется, коихъ 105 дѣлаютъ червонецъ.

И такъ когда курсъ въ 45 штиверовъ, то пропорція будетъ сія 1 рубль: 1 черв. = 45 : 105 = 3 : 7 и по сему сіе уравненіе 7 рубл. = 3 черв. Отсюда найти можно, сколько одинъ червонецъ дѣлаетъ рублей: ибо 3 черв. : 7 рубл. = 1 червон. къ четвертому числу $2\frac{1}{3}$ рубля. Естьли же будетъ курсъ въ 50 штиверовъ, то имѣетъ мѣсто сія пропорція 1 рубл. : 1 черв. = 50 : 105 = 10 : 21; почему 21 рубль, составляетъ 10 червонцовъ, и отсюда 1 черв. = $2\frac{1}{10}$ рубля. Когда же курсъ будетъ не болѣе 44 штиверовъ, то 1 рубль : 1 червон. = 44 : 105, и слѣд. 1 черв. = $2\frac{17}{44}$ руб. = 2 рубл. $38\frac{7}{11}$ коп.

480.

По сему можно сравнивать монеты больше, нежели; двухъ родовъ, что особливо въ векселяхъ очень часто случается; для примѣру положимъ, что нѣкто хочетъ отсюда въ Берлинъ переслать 1000 рублевъ, и желаетъ знать

сколько

сколько показанное число рублей составляетъ берлинск. червонцовъ; а здѣшней курсъ = $47\frac{1}{2}$ штиверовъ [т. е одинъ рубль дѣлаетъ $47\frac{1}{2}$ Голландскихъ штиверовъ], потомъ 20 штиверовъ дѣлаютъ Голландской гулденъ, а $2\frac{1}{2}$ Голландскихъ гулденовъ, составляютъ Голландской спецїесталеръ; курсъ же изъ Голландїи въ берлинъ есть 142, т. е. за 100 спецїесталеровъ платятъ въ берлинѣ 142 рейхсталера, и наконецъ 1 червонецъ стоитъ въ берлинѣ 3 рейхсталера.

481.

Къ рѣшенїю сего вопроса приступимъ мы по порядку начавъ съ штиверовъ, когда 1 руб. = $47\frac{1}{2}$ штив.: или 2 руб. = 95 штивер.: то полагается
2 руб.: 95 штив. = 1000 рубл.: 47500 штивер. потомъ посылаю 20 штивер.: 1 гулд = 47500 штив. къ 2375 гульденамъ.

Когда же $2\frac{1}{2}$ гульдена = 1 спецїестал. т. е. 5 гульд. = 2 спецїестал. то посылай 5 гулд.: 2 спецїестал. = 2375 гулд. къ 950 спец.

спецїестал. Теперь приступимъ къ берлинскимъ рейхсталерамъ: по курсу 142 на сто, будетъ 100 спецїесталер. : 142 рейхстал. = 950 спецїестал. : къ 1349 р. талер. наконецъ дошедъ до червонцовъ полагаемъ 3 р. тал. : 1 черв. = 1349 р. тал. къ $449\frac{2}{3}$ червонц.

482.

Для большаго изъясненїя сей выкладки положимъ, что берлинской банкиръ выдать сей суммы не хочетъ, подъ какимъ бы то видомъ ни было, а платитъ вексель съ вычетомъ 5 процентовъ, т. е. вмѣсто 105 даетъ только 100, то для сей притчины надлежитъ къ прежнему прибавить сїе тройное правило:

105 : 100 = $449\frac{2}{3}$: $428\frac{16}{63}$ червонцамъ.

483.

Къ сему хотя и требуется 6 выкладокъ по тройному правилу, однакожъ найдено средство сокращать сїе счисленїе помощїю такъ называемаго *цѣлнаго правила.* Для изъясненїя сего правила

возмемъ

возмемъ изъ 6ти прежнихъ выкладокъ, каждые два переднïе числа въ разсужденïе и здѣсь предложимъ:

I) 2 руб.: 95 штив. II) 20 шт.: 1 гулд.
III) 5 Голл. гулд.: 2 сп. тал. IV) 100 сп. тал.: 142 р. тал.
V) 3 р. тал.: 1 черв. VI) 105 р. тал.: 100 р. тал.

Разсмотрѣвъ прежнее вычисленïе находимъ мы, что предписанную сумму вездѣ множили на второй членъ, а на первой дѣлили; откуда видно, что то же самое найдется, когда предложенная сумма вдругъ на произведенïе изъ всѣхъ вторыхъ членовъ умножится, и на произведенïе изъ всѣхъ первыхъ раздѣлится, или здѣлается сïе одно тройное правило: какъ произведенïе всѣхъ первыхъ членовъ содержится къ произведенïю всѣхъ вторыхъ, такъ данное число рублей къ числу червонцовъ, которые въ берлинѣ выдать должно.

484.

Сïю выкладку еще больше сократить можно: ежели одинъ какой нибудь изъ первыхъ членовъ равенъ одному изъ

вторыхъ

вторыхъ, то обѣихъ ихъ вымарать, или ежели они оба дѣлятся другъ на друга или на одно другое какое нибудь число, то частныя на ихъ мѣста ставить должно; почему прежней примѣръ здѣланъ будетъ такъ:

2	:	88 19	
70	:	1	
5	:	2	
100	:	142	
3	:	1	1000 рублевъ
705 21	:	700 5	
6300	:	2698 — 1000 къ искомому 428 16/63 черв.	

7)26980

9)3854(2

428(2

485.

При употребленiи сего цѣннаго правила наблюдать должно сей порядокъ: начинай съ самаго тогожъ роду монетъ, о которомъ спрашивается, и сравнивай его съ другимъ какимъ нибудь, съ котораго начинай слѣдующее содержанiе и съ нимъ сравнивай третiей родъ. такъ чтобъ каждое содержанiе съ того рода

монетъ начиналось, которымъ прежде кончилось, и такимъ образомъ продолжай до тѣхъ поръ, пока придешъ до того рода монетъ, о которомъ рѣчь будетъ, и наконецъ причисляются еще и росходы.

486.

Къ большему изъясненію прилагаемъ еще нѣкоторые вопросы:

Когда червонцы въ Гамбургѣ однимъ процентомъ больше нежели 2 рейхсталера банко [т. е. 50 черв. дѣлаютъ не 100 но 101 р. тал. *B*°], а курсъ между Гамбургомъ и Кенигсбергомъ, 119 грошей Польскихъ [т. е. 1 р. тал *B*° дѣлаетъ 119 грошей Польск.] спрашивается, сколько 1000 червонцовъ составятъ Польскихъ гульденовъ. [30 грошей Польск. дѣлаютъ 1 Польской гульденъ]

черв. 1	:	~~2~~ р. талера *B*°	1000 черв.
~~100~~ (50)	:	101 р. талер. *B*°	,
1	:	119 грош. польск.	
30	:	1 гульд. польск.	

15ØØ : 12019 = 1000 : къ иском:

120190ØØ
3) 40063 (1
3) 8012 (3

8012 $\frac{2}{3}$ Червонц.

487.

Ради большаго сокращенія спрашивающее число ставить можно надъ вторымъ рядомъ : ибо тогда произведеніе второй строки раздѣливъ на произведеніе первой получится желаемой отвѣтъ. Вопросъ : Лейпцигъ получаетъ изъ Амстердама червонцы , которые тамъ 5 гульденовъ и 4 штивер. ходячихъ денегъ стоятъ, [т. е. червонецъ стоитъ 104 штивера или 5 червонц. дѣлаютъ 26 Голланд. гульденовъ, и когда *А* жіоди *В°* въ Амстердамѣ 5 процентовъ, [т. е. 105 ходячихъ дѣлаютъ 100 *В°*] ; а вексельной курсъ изъ Лейпцига въ Амстердамъ въ банкѣ 133¼ процентовъ [т. е. за 100 р. тал. В° въ Лейпцигѣ платятъ 133¼ р. тал.] но 2 р. тал. Голланд. дѣлаютъ 5 Голланд. гульденовъ , сколько

 талеровъ

талеровъ по симъ вексельнымъ курсамъ въ Лейпцигѣ заплатить должно за 1000 червонцовъ.

(~~5~~) ~~1000~~ черв.

черв. ~~8~~	:	26 Голл. ходяч. гульд.
~~105~~(21)	:	4 (~~20~~) ~~100~~ Голл. гульд. B°.
~~5~~	:	~~2~~ талера Голл. B°.
~~400~~ (~~2~~)	:	533 тал. въ Лейпц:
21	:	55432 (1
		3) 18477 (4
		7) 2639 $\frac{13}{21}$ таллеровъ

или 2629 тал: и 15 гут. грош.

ГЛАВА X.

О сложныхъ содержаніяхъ.

488.

Два или больше содержаній складываются вмѣстѣ, когда какъ предъидущіе, такъ и послѣдующіе оныхъ члены между собою помножатся, и тогда говорится, что содержаніе между обѣими сими произведеніями есть сложенное изъ двухъ или больше данныхъ содержаніи.

Такъ

Такъ изъ сихъ содержаній $a:b$, $c:d$, $e:f$ произходитъ чрезъ составленіе сіе содержаніе $ace:bdf$.

489.

Понеже содержаніе не перемѣняется, когда его оба члена на одно число раздѣлятся, то прежнее составленное содержаніе сократить можно, ежели предъидущіе члены въ сравненіи съ послѣдующими уничтожатся или сократятся, какъ въ прежней главѣ показано.

По сему изъ слѣдующихъ данныхъ содержаній сложенное найдется такимъ образомъ:

данныя содержанія суть

12 (4) (2) : (5) 75

28 (1) : (3) 33

55 (11) : (7) 35

2 : 5

Слѣдовательно получится по сложенію сіе содержаніе 2 : 5.

490.

Сїе самое вообще бываетъ и при буквахъ, особливо сей случай достоинъ примѣчанїя гдѣ всегда предъидущей членъ равенъ прежнему послѣдующему. Такъ когда данныя содержанїя будутъ

$a : b$
$b : c$
$c : d$
$d : e$
$e : a$ то сложное изъ нихъ

содержанїе $1 : 1$

491.

Для показанїя пользы сего ученїя примѣчать надлежитъ, что два четыреугольныя поля такое содержанїе между собою имѣютъ, которое сложено изъ содержанїя ихъ длины и ширины.

Пусть будутъ наприм. два такїя поля A и B, одного длина 500 футовъ, а ширина 60 футовъ, другаго же длина 360 фут. а ширина 100 фут. то содержанїе

длины

длины есть 500 : 360 , ширины какъ 60 : 100 , чего ради будетъ.

500(5) : 300(6)

60 : 100 слѣдовательно поле А

держится къ полю В какъ 5 : 6

492

Другой примѣръ пусть будетъ поле *А* въ длину 720 футовъ, а въ ширину 88 фут:, поле *В* въ длину 660 фут., въ ширину 90 фут., то надлежитъ слѣдующія два содержанія сложить вмѣстѣ

длины 720(3)(4) : (3)(6)600

ширины 88(8) 4 : 5 (10)90

16 : 15 и сіе есть

содержаніе поля *А* къ полю *В*.

493

Для сравненія двухъ мѣстъ, или пространствъ двухъ покоевъ между собою надлежитъ знать, что содержаніе ихъ сложено изъ трехъ I) изъ содержанія длины, II) ширины, и напослѣдокъ III) высоты. Пусть будетъ одинъ покой *А*,

 коего

коего́ длина = 36 фут., ширина = 16 фут. и высота = 14 фут.; а другаго покоя *B* длина = 42 фут., ширина = 24 фут. и высота = 10, то будутъ при содержанія длины $\not{3}\not{6}(\not{6})2 : \not{4}(\not{2}\not{7})$

ширины $\not{1}\not{6}(2) : (\not{3})\not{2}\not{4}$

высоты $\not{1}\not{4}(\not{7}) : (5)\not{1}\not{0}$

$4 : 5$ и такъ

пространство покоя *A* къ пространству покоя *B* содержится какъ $4 : 5$.

494.

Ежели слагаемыя симъ образомъ содержанія равны между собою, то произходятъ изъ того умноженныя содержанія; то есть изъ двухъ равныхъ произходитъ удвоенное, или квадратное содержаніе, изъ трехъ равныхъ утроенное, или кубичное содержаніе, и такъ далѣе. По сему изъ содержаній $a : b$ и $a : b$ будетъ сложенное содержаніе $a^2 : b^2$, чего ради говорится, что квадраты находятся въ удвоенномъ содержаніи ихъ корней; а изъ содержанія $a : b$ трижды

взятаго

взятаго выходитъ $a^3 : b^3$, и для того говорится, что кубы находятся въ утроенномъ содержанiи ихъ корней.

495.

Въ геометрiи доказывается, что площади двухъ круговъ находятся въ удвоенномъ содержанiи ихъ поперешниковъ, т. е. они содержатся между собою такъ какъ квадраты ихъ поперешниковъ.

Пусть будетъ такая площадь круга *A*, котораго поперешникъ = 45 фут.; а другаго *B* поперешникъ = 30 фут., то будетъ оная площадь содержаться къ сей, какъ 45.45 : 30.30 или ихъ содержанiе, сложено изъ сихъ двухъ:

$$\cancel{45}(\cancel{9})3 \quad : \quad \cancel{30}(\cancel{0})2$$

$$\cancel{45}(\cancel{9})3 \quad : \quad \cancel{30}(\cancel{0})2 \qquad \text{слѣдов. сiи}$$

площади содерж. какъ 9 : 4

496.

Доказывается также, что толщины двухъ шаровъ содержатся какъ кубы

ихъ поперешниковъ: и такъ ежели поперешникъ одного шара *А* будетъ въ одинъ футъ, а другаго *В* будетъ въ 2 фута, то толщина шара *А*, къ толщинѣ шара *В* содержится какъ 1 : 8.

И по сему когда оба сіи шара изъ одной состоятъ матеріи, то шаръ *В* будетъ въ 8 разъ тяжелѣе шара *А*.

497.

По сему можно находить вѣсъ пушечныхъ ядеръ изъ ихъ поперешниковъ, естьли только одного какого нибудь ядра вѣсъ будетъ извѣстенъ. Пусть будетъ наприм. одно ядро *А*, 2 дюйма въ поперешникѣ, и вѣсомъ въ 5 фунтовъ, то спрашивается о тяжести другаго ядра, коего поперешникъ въ 8 дюймовъ, чего ради пропорція будетъ $2^3 : 8^3$ такъ 5 къ четвертому искомому 320 фунтамъ, т. е. къ вѣсу ядра *В*. Другаго ядра *С*, котораго поперешникъ = 15 дюймамъ, вѣсъ найдется такимъ оброзомъ $2^3 : 15^3 = 5$ фунт къ четвертому искомому $2109\frac{3}{8}$ фунт.

498.

Когда потребуется содержаніе двухЪ дробей какЪ $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$, то можно его всегда изобразить цѢлыми числами; ибо когда только обѢ помянутые дроби помножатся на bd, то произойдетЪ содержаніе $ad : bc$; которое прежнему равно, и для того сія пропорція справедлива $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ad : bc$; и ежели содержаніе $ad : bc$ можно будетЪ еще сократить, то содержаніе будетЪ гораздо легче, какЪ $\frac{15}{24} : \frac{25}{36}$ такЪ $15 . 36 : 24 . 25 = 9 : 10$.

499.

СпрашиваетЪся какЪ сіи дроби $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$ будутЪ между собою содержаться? здѢсь видно, что $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} = b : a$, что словами изобразится такЪ: двѢ дроби у которыхЪ числители равны 1, содержатся между собою обратно, какЪ ихЪ знаменатели: сіе же самое бываетЪ и при двухЪ дробяхЪ, у коихЪ числители равны между собою: ибо $\frac{c}{a} : \frac{c}{b} = b : a$, т. е. содержатся обратно, какЪ ихЪ знаменатели. Когда

же

же дроби имѣть будутъ одинакихъ знаменателей, какъ $\frac{a}{c} : \frac{b}{c}$, то содержатся они какъ ихъ числители [въ прямомъ, а не въ обратномъ содержаніи], а имянно какъ $a : b$. Поссему $\frac{3}{8} : \frac{3}{16} = 2 : 1$ и $\frac{10}{7} : \frac{15}{7} = 10 : 15$ или $2 : 3$.

500.

При паденіи тѣлъ примѣчено, что въ одну секунду тѣло паденіемъ своимъ переходитъ 15 футовъ, въ 2 секунды перебѣгаетъ оно внизъ 60 футовъ, въ 3, 135 фут. и изъ того заключили, что высоты содержатся между собою какъ квадраты времянъ, и обратно времена содержатся между собою какъ квадратные корни высотъ.

Естьли кто спроситъ, во сколько времени упадетъ камень внизъ съ высоты 2160 футовъ, то содержаніе будетъ $15 : 2160 = 1$, къ квадрату искомаго времени; и такъ квадратъ искомаго времяни $= 144$, а самое время есть 12 секундъ.

501.

501.

Когда спрашивается сколь глубоко упасть можетъ камень въ одинъ часъ, т. е въ 3600 секундъ? то посылай какъ квадраты времянъ, т. е. $1^2 : 3600^2$, такъ данная высота 15 фут. къ четвертому или искомой высотѣ.

И такъ 1 : 1296000 = 15 къ иском.
15 194400000 фут.

6480
1296

194400000

Естьли мы щитать будемъ 24000 фут. на одну нѣмецкую милю, то оная высота будетъ 8100 миль, которая будетъ больше нежели вся толщина земли.

502.

Подобныя обстоятельства наблюдаются при оцѣнкѣ дорогихъ каменьевъ, при которыхъ не на самой ихъ вѣсъ, но на большее содержаніе смотрятъ. При алмазахъ наблюдается сіе правило, что цѣна

цѣна ихъ содержится такъ какъ квадратъ вѣса, или содержаніе цѣнъ равно удвоенному содержанію вѣса. Вѣсъ, которымъ ихъ вѣсятъ называется каратъ и содержитъ 4 грана, по сему когда алмазъ вѣсомъ въ одинъ каратъ стоитъ 2 рубли, то алмазъ вѣсомъ во 100 каратовъ, столько разъ больше стоять будетъ, сколько квадратъ 100 больше квадрата 1цы, почему тройное правило поставить должно такъ:

$$1^2 : 100^2 = 2 \text{ рубл.}$$

Или 1 : 10000 = 2 рубл. къ четвертому искомому 20000 рубл. Въ Португаліи находится алмазъ вѣсомъ въ 1680 каратовъ, которому цѣна по вышенайденному найдется такъ.

$1^2 : 1680^2 = 2$ рубл... или 1 : 2822400 къ четвертому 5644800 рублей.

503.

Достопамятной примѣръ сложныхъ содержаній даютъ намъ почты, гдѣ почтовыя деньги по сложенному содержанію

числа

числа лошадей и числа миль платятъ; такъ когда за одну лошадь на милю 8 грошей, или $\frac{1}{3}$ талера дается, то хочу знать сколько за 28 лошадей на $4\frac{1}{2}$ мили заплатить должно? Здѣсь ставится вопервыхъ содержаніе лошадей 1 : 28, подъ симъ пишется содержаніе миль 2 : 9 и оба содержанія складываются вмѣстѣ такъ 2 : 252 или короче 1 : 126, такъ $\frac{1}{3}$ талера, къ четвертому искомому 42 талерамъ.

Когда за 8 лошадей на 3 мили платится червонецъ, то что должно дать за 30 лошадей на 4 мили?

Выкладка будетъ слѣдующая:

$$\begin{array}{l} \cancel{8}(\cancel{2}) : 5(\cancel{10})\cancel{30} \\ \cancel{3} \quad : \quad \cancel{4} \\ \hline 1 : 5 = 1 \end{array}$$

червон. къ четвертому искомому 5 червон. слѣдовательно заплатить должно 5 червон.

504.

Сіе сложное содержаніе случается также и при работахъ, гдѣ плату по сложенному содержанію числа работниковъ и числа дней чинить должно.

Такъ

Такъ наприм. когда одному каменьщику каждой день дается по 10 грошей, хочу знать, сколько заплатить должно 24 каменьщикамъ, которые 50 дней работали? выкладка будетъ такая

$$\begin{array}{l} 1 : 24 \\ 1 : 50 \\ \hline 1 : 1200 = 10 \text{ грош.} : 500 \text{ р. тал.} \\ \quad\quad 10 \\ \hline 3)\ 12000 \text{ грош.} \\ \quad\quad 4000 \\ 8)\ \ 500 \text{ талер.} \end{array}$$

Понеже въ семъ примѣрѣ дано 5 членовъ, то правило сїе въ ариѳметическихъ книгахъ называется *пятернымъ*.

ГЛАВА. XI.

О геометрическихъ прогрессїяхъ.

505.

Рядъ въ непрерывномъ содержанїи увеличивающихся или умаляющихся чиселъ прогрес-

прогрессіею геометрическою называется; а число, которое показываетъ во сколько разъ каждой членъ больше своего предъидущаго, именуется *знаменателемъ*. И такъ когда первой членъ 1, а знаменатель 2, то прогрессія геометрическая есть слѣдующая:

члены	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
прогре.	1,	2,	4,	8,	16,	32,	64,	128,	256,	512

и прочч.

указатели поставленные здѣсь на верьху, показываютъ къ которому мѣсту каждой членъ принадлежитъ.

506.

Ежели вообще первой членъ $=a$, и знаменатель b, то прогрессія геометрическая будетъ:

$$\overset{1}{a},\ \overset{2}{ab},\ \overset{3}{ab^2},\ \overset{4}{ab^3},\ \overset{5}{ab^4},\ \overset{6}{ab^5},\ \overset{7}{ab^6},\ \overset{8}{ab^7},\ \ldots \overset{n}{ab^{n-1}}$$

и такъ когда сія прогрессія состоятъ будетъ изъ n членовъ то послѣдней ея членъ $= ab^{n-1}$. Здѣсь примѣчать надлежитъ, когда знаменатель будетъ больше единицы, то члены всегда растутъ.

Естьли же $b=1$, то всѣ члены равны будутъ, и наконецъ ежели b будетъ меньше 1цы, или дробь, то члены часъ отъ часу умаляются, такъ когда $a=1$, $b=\frac{1}{2}$, то произойдетъ сія прогрессія $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}$ и протч.

§ 57.

Здѣсь разсмотрѣть еще надлежитъ слѣдующіе вещи.

I) первой членъ, которой здѣсь a,

II) знаменатель, которой здѣсь b,

III.) число членовъ, которое положено $=n$

IV.) послѣдней членъ, котор. нашелся $=ab^{n-1}$

Почему когда даны три первые вещи, то послѣдней членъ найдется, когда $(n-1)$тая степень знаменателя, т. е. b^{n-1} на первой членъ помножится.

Ежели бы кто похотѣлъ знать 50 той членъ въ сей геометрической прогрессіи 1, 2, 4, 8 и протч. то будетъ $a=1$, $b=2$, $n=50$, почему 50 той членъ $=2^{49}$; но $2^9=512$, то $2^{10}=1024$, сего квадратъ $2^{20}=1048576$, сего числа паки квадратъ

2^{40}

$2^{40}=1099511627776$ и когда 2^{40} на 2^9 $=512$ умножишь, то получится 2^{49} $=512.1099511627776=562949953421312$.

508.

Здѣсь особливо спрашивается, какимъ образомъ сумму всѣхъ членовъ такой прогрессіи находить должно, что мы здѣсь показать намѣрены такъ: пусть будетъ сперва состоять сія прогрессія изъ 10 членовъ 1. 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512. которой сумму изъявимъ буквою s такъ что $s=1+2+4+8+16+32+64+128+256+512$, то сія прогрессія дважды взятая будетъ $2s=2+4+8+16+32+64+128+256+512+1024$, изъ сей вычти верхнюю прогрессію, въ остаткѣ будетъ $s=1024-1=1023$, и слѣдовательно искомая сумма будетъ $=1023$.

509.

Возмемъ теперь въ сей же самой прогрессіи число членовъ неопредѣленное и положимъ $=n$, такъ что сумма будетъ $s=1+2+2^2+2^3..2^4+....+2^{n-1}$,

 сію

сію умноживъ на 2 будетъ $2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 \ldots\ldots + 2^n$, изъ сей удвоенной вычти первую, то найдется $S = 2^n - 1$; по сей причинѣ искомая сумма получится, когда послѣдней членъ 2^{n-1} умножится на знаменателя прогрессіи 2, то произойдетъ 2^n, и изъ сего вычесть 1 цу.

510.

Изъяснимъ сіе правило слѣдующими примѣрами, полагая вмѣсто n по порядку 1, 2, 3, 4, 5, и протч., какъ $1 = 1$, $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 4 = 7$, $1 + 2 + 4 + 8 = 15$, $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$, $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$ и протч.

511.

Здѣсь обыкновенно случается сей вопросъ: нѣкто продаетъ свою лошадь по числу подковныхъ гвоздей, которыхъ она имѣетъ 32, за первой гвоздь проситъ онъ 1 пфеннингъ, за другой 2, за третей 4, за четвертой 8, пфен. и всегда за слѣдующей въ двое больше, нежели за ближайшей передъ нимъ по-

послѣдней.

лѣдней , спрашивается сколь дорого лошадь стоитъ ?

Здѣсь надлежитъ геометрическую прогрессію 1, 2, 4, 8, 16 и протч. продолжать даже до 32 го члена и всѣхъ ихъ сыскать сумму. Но понеже послѣдней членъ 2^{31} и выше сего найдено, что $2^{20}=1048576$, то умножь сіе число на $2^{10}=1024$ будетъ $2^{30}=1073741824$, потомъ помножь еще сіе число на 2, и выдетъ $2^{31}=2147483648$, слѣдовательно сумма будетъ равна сему числу дважды взятому и единицею уменьшенному :

2) 4294967295 пфен. ; обрати ихъ въ гроши
6) 2147483647(1
3) 357913941(1 гроши и 3 пфен. даютъ тал.
8) 119304647 (7
14913080 слѣдов. талер. 21 грошъ и 3 пфен. будетъ цѣна лошади.

512.

Пусть будетъ теперь знаменатель =3 и прогрессія геометрическая 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, сихъ 7ми членовъ сыскать сумму ?

Положи ея $= s$, то $s = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729$, умножь сію сумму на 3 будетъ $3s = 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187$, изъ сего вычти первую прогрессію, то получится $2s = 2187 - 1 = 2186$ удвоенная сумма, слѣдовательно самая сумма $= 1093$.

513.

Въ сей же самой прогрессіи, пусть будетъ число членовъ $= n$ и сумма $= s$, такъ что $s = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 \ldots\ldots + 3^{n-1}$ помноживъ на 3 выдетъ $3s = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 \ldots\ldots + 3^n$ изъ сей вычти первую, то всѣ члены нижней прогрессіи выключая послѣдней и всѣ члены верхней кромѣ перваго въ сравненіи другъ съ другомъ уничтожатся и получится $2s = 3^n - 1$, слѣдовательно $s = \frac{3^n - 1}{2}$.

И такъ сумма сей геометрической прогрессіи найдется, когда послѣдней членъ умножится на 3, и изъ произведенія вычтется 1, а остатокъ раздѣлится

на

на 2, какЪ изЪ слѣдующихЪ примѣровЪ видно: $1=1$, $1+3=\frac{3.3-1}{2}=4$; $1+3+9=\frac{9.3-1}{2}=13$, $1+3+9+27=\frac{27.3-1}{2}=40$; $1+3+9+27+81=\frac{3.81-1}{2}=121$.

514.

ПоложимЪ теперь вообще первой членЪ $=a$, знаменателя $=b$, число членовЪ $=n$, и сумму ихЪ $=ſ$, такЪ что $ſ=a+ab+ab^2+ab^3+ab^4 \ldots\ldots +ab^{n-1}$ сіе помножь на b, выдетЪ

$bſ=ab+ab^2+ab^3+ab^4+ab^5 \ldots\ldots +ab^n$ изЪ сего вычти верхнюю прогрессію, будетЪ

$(b-1)ſ=ab^n-a$, почему искомая сумма $ſ=\frac{ab^n-a}{b-1}$; слѣдовательно сумма каждой геометрической прогрессіи найдется, когда послѣдней членЪ умножится на знаменателя прогрессіи, и изЪ произведенія вычтется первой членЪ, а остатокЪ раздѣлится на знаменателя уменьшеннаго 1 цею.

515.

Дана геометрическая прогрессія состоящая изъ 7 членовъ, въ которой первой членъ = 3, а знаменатель = 2, то есть $a = 3$, $b = 2$ и $n = 7$, слѣдовательно послѣдней членъ $= 3.2^6$, т. е. $3.64 = 192$.

И самая прогрессія = 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192.. Теперь помножь послѣдней членъ 192 на знаменателя 2 дастъ 384, изъ сего вычти первой членъ, будетъ 381; и сей остатокъ раздѣли на $b-1$, т. е. на 1, будетъ 381, которое число изъявляетъ сумму прогрессіи.

516.

Пусть будетъ дана еще геометрическая прогрессія изъ 6ти членовъ состоящая; первой ея членъ = 4, а знаменатель $= \frac{3}{2}$, такъ что прогрессія будетъ 4, 6, 9, $\frac{27}{2}$, $\frac{81}{4}$, $\frac{243}{8}$ сей послѣдней членъ $\frac{243}{8}$ умножь на знаменателя $\frac{3}{2}$ выдетъ $\frac{729}{16}$ отсюда вычти первой членъ 4, въ остаткѣ будетъ $\frac{665}{16}$, которой должно

раз-

раздѣлить на $b-1=\frac{1}{2}$ вЪ частномЪ выдетЪ искомая сумма прогрессіи $\frac{665}{8}=83\frac{1}{8}$.

517.

Когда знаменатель будетЪ меньше 1цы, то члены прогрессіи умаляются, и можно опредѣлить сумму такой безконечной прогрессіи.

Пусть будетЪ наприм. первой членЪ $=1$, знаменатель $=\frac{1}{2}$ и сумма $=ſ$, такЪ что $ſ=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$ и такЪ безконечно; умноживЪ оную на 2, будетЪ $2ſ=2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$ и протч. безконечно, изЪ сей вычти верхнюю прогрессію, останется $ſ=2$ искомая сумма безконечной прогрессіи.

518.

Пусть будетЪ еще первой членЪ $=1$, знаменатель $=\frac{1}{3}$, сумма $ſ$; такЪ что $ſ=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}$ и такЪ далѣе безконечно, помноживЪ всю сію сумму на 3 будетЪ $3ſ=3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}$ и протч. безконечно, изЪ сего вычти

 верх-

верхней рядъ, останется $2s = 3$, слѣдовательно сумма $= 1\frac{1}{2}$.

§ 519.

Положимъ первой членъ $= 2$, знаменателя $= \frac{3}{4}$ сумму $= s$, такъ что $s = 2 + \frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \frac{27}{32} + \frac{81}{128}$ и протч. безконечно, помножь сей рядъ на $\frac{4}{3}$, то будетъ $\frac{4}{3}s = \frac{8}{3} + 2 + \frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \frac{27}{32} + \frac{81}{128}$ и протч. безконечно, изъ сего вычти верхней рядъ останется $\frac{1}{3}s = \frac{8}{3}$, слѣдовательно самая сумма будетъ точно 8.

§ 520.

Когда вообще первой членъ положится $= a$, знаменатель прогрессіи $= \frac{b}{c}$, такъ что сія дробь меньше 1цы, и слѣдовательно b меньше нежели c, то можно сумму сей безконечной прогрессіи сыскать слѣдующимъ образомъ: положи $s = a + \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4}$ и протч. безконечно, умноживъ здѣсь на $\frac{b}{c}$ будетъ $\frac{b}{c}s = \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} + \frac{ab^5}{c^5}$ и протч. безконечно; сей рядъ вычти изъ верхняго, то останется $(1 - \frac{b}{c})s = a$, слѣдователь-

но $s = \frac{a}{1 - \frac{b}{c}}$, помножь теперь сверьху и снизу на c, получится $s = \frac{ac}{c-b}$, почему сумма такой безконечной прогрессіи $= \frac{a}{1-\frac{b}{c}} = \frac{ac}{c-b}$.

И такЪ сія сумма находится, когда первой членЪ a на 1 знаменателемЪ уменьшенную раздѢлится; или изЪ 1 вычти знаменателя прогрессіи и на остатокЪ раздѢли первой членЪ, частное покажетЪ сумму прогрессіи.

521.

Когда вЪ такой прогрессіи знаки + и — перемѢняются, то ея сумма подобнымЪ образомЪ найдется: ибо пусть будетЪ $s = a - \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} - \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4}$ и прочч. помножь сей рядЪ на $\frac{b}{c}$, то будетЪ $\frac{b}{c}s = \frac{ab}{c} - \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} - \frac{ab^4}{c^4}$ и прочч. сложи сей послѢдней сЪ верхнимЪ, то произойдетЪ $(1+\frac{b}{c})s = a$, откуда найдется искомая сумма $s = \frac{a}{1+\frac{b}{c}}$ или $\frac{ac}{c+b}$.

522.

Примѣръ: пусть будетъ первой членъ $a = \frac{3}{5}$, знаменатель прогрессіи $= \frac{2}{5}$, то есть $b = 2$, $c = 5$, то ряда $\frac{3}{5} + \frac{6}{25} + \frac{12}{125} + \frac{24}{625}$ и протч. сумма найдется такъ: вычти знаменателя прогрессіи изъ 1, и на остатокъ $\frac{3}{5}$, раздѣли первой членъ $\frac{3}{5}$, искомая сумма будетъ $= 1$.

Когда же знаки $+$ и $-$ перемѣняются и предложенъ будетъ слѣдующей рядъ: $\frac{3}{5} - \frac{6}{25} + \frac{12}{125} - \frac{24}{625} +$ и протч., то его сумма будетъ $\frac{a}{1+\frac{b}{c}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{3}{7}$.

523.

Для упражненія предлагается здѣсь безконечная прогрессія $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000}$ и протч., въ которой первой членъ $\frac{3}{10}$: знаменателя $\frac{1}{10}$ вычти изъ единницы и на остатокъ $\frac{9}{10}$ раздѣли первой членъ, частное покажетъ искомую сумму $= \frac{1}{3}$.

Когда возмется одинъ только членъ $\frac{3}{10}$, то не достаетъ еще $\frac{1}{30}$; а когда возмутся 2 члена $\frac{3}{10}+\frac{3}{100}=\frac{33}{100}$, то до $\frac{1}{3}$ не достаетъ еще $\frac{1}{300}$ итакъ далѣе.

524.

Ежели данъ будетъ безконечной рядъ $9+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10000}+$ и протч. первой его членъ 9, а знаменатель $\frac{1}{10}$, чего ради вычти сего знаменателя изъ 1, на остатокъ $\frac{9}{10}$ раздѣли первой членъ, частное даетъ искомую сумму $=10$. Здѣсь примѣчать надлежитъ, что сей рядъ представленъ быть можетъ десятичною дробью: то есть 9,9999999 и протч.

ГЛАВА XII.

О безконечныхъ десятичныхъ дробяхъ.

525.

Выше сего видѣли мы, что при логариѳмическихъ выкладкахъ мѣсто простыхъ дробей десятичныя употребляются, что и въ другихъ численіяхъ съ

не малою пользою дѣлается. И такъ здѣсь показать надлежитъ, какимъ образомъ простая дробь въ десятичную превращается, и какъ обратнымъ образомъ величину десятичной дроби простою дробью изобразить должно.

526.

Пусть будетъ вообще данная дробь $\frac{a}{b}$, которую въ десятичную дробь обратить надобно. Понеже сїя дробь представляетъ частное произшедшее изъ дѣленїя числителя a на знаменателя b, то вмѣсто a поставь сїю формулу $a,000000$, которая ни что иное какъ число a изображаетъ, потому что ни одной 10той ни одной 100 и протч. части при ней не находится. Сїю формулу раздѣли теперь на число b, по обыкновенному правилу дѣленїя, причемъ примѣчать только надлежитъ, чтобъ запятая отдѣляющая цѣлое число отъ дроби десятичной, была въ надлежащемъ мѣстѣ поставлена. Сїе изъяснимъ мы слѣдующимъ примѣромъ:

Пусть будетъ данная дробь $\frac{1}{2}$, то десятичное дѣленіе есть такое $\frac{2)\ 1,000000}{0,500000}$ $=\frac{1}{2}$, отсюда видимъ мы, что $\frac{1}{2}$ то же, что и 0,500000, или что и 0,5: ибо десятичная дробь $\frac{5}{10}$ столь же велика какъ $\frac{1}{2}$.

527.

Пусть будетъ дана еще дробь $\frac{1}{3}$, то десятичная будетъ сія $\frac{3)\ 1,000000}{0,333333}$ и прот. $=\frac{1}{3}$. Отсюда видно, что сія десятичная дробь равная $\frac{1}{3}$ ти нигдѣ не кончится, но продолжается безконечно чрезъ 3; слѣд. всѣ сіи дроби $\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\frac{3}{100000}+\frac{3}{1000000}+$ и протч. безконечно вмѣстѣ взятые дѣлаютъ точно $\frac{1}{3}$, какъ уже выше сего показано.

Вмѣсто $\frac{2}{3}$ находится слѣдующая десятичная дробь, которая равнымъ образомъ продолжается безконечно $\frac{3)\ 2,000000}{0,666666}=\frac{2}{3}$, что также изъ прежняго явствуетъ: ибо сія дробь вдвое больше прежней.

528.

Ежели дана будетъ дробь $\frac{1}{4}$, то десятичное дѣленіе будетъ $\frac{4)\ 1,000000}{0,250000} = \frac{1}{4}$, слѣдовательно $\frac{1}{4}$ тоже что и 0,25000 или 0, 25; потому что $\frac{2}{10} + \frac{5}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$, равнымъ образомъ вмѣсто $\frac{3}{4}$ получится десятичная дробь $\frac{4)\ 3,000000}{0,750000} = \frac{3}{4}$ слѣд. $\frac{3}{4} = 0,75$, то есть $\frac{7}{10} + \frac{5}{100} = \frac{75}{100}$, которую дробь раздѣливъ на 25 въ частномъ получишь $\frac{3}{4}$.

Ежели бы понадобилось $\frac{5}{4}$ превратить въ десятичную дробь, то было бы $\frac{4)\ 5,000000}{1,250000} = \frac{5}{4}$ ибо она равна $1 + \frac{25}{100}$, то есть $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

529.

Такимъ образомъ будетъ $\frac{1}{5} = 0,2$; $\frac{2}{5} = 0,4$; $\frac{3}{5} = 0,6$; $\frac{4}{5} = 0,8$; $\frac{5}{5} = 1$; $\frac{6}{5} = 1,2$; и пр.

Ежели знаменатель дроби будетъ 6, то найдется $\frac{1}{6} = 0,1666666$ и протч то же, что и 0,6666666 — 0, 5; а 0,6666665 $= \frac{2}{3}$, 0, 5 $= \frac{1}{2}$, слѣд. 0,1666666 $= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Вмѣсто дроби $\frac{2}{6}$ находится 0, 333333 и протч. $= \frac{1}{3}$; напротивъ того $\frac{3}{6} = 0$.

$\frac{3}{6}=0,5000000=\frac{1}{2}$; $\frac{5}{6}=0,8333333$ и протч. тоже что и $0,3333333+0,5$ то есть $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$.

530.

Ежели знаменатель данной дроби будетъ 7, то произшедшіе оттуда десятичные дроби будутъ гораздо смѣшеннѣе. Какъ мѣсто $\frac{1}{7}$ находится 0, 142 857 и протч. причемъ примѣчать надлежитъ, что сіи 6 чиселъ 142857 въ слѣдующихъ дроби знакахъ всегда повторяются: и дабы показать, что сія десятичная дробь точно $\frac{1}{7}$ составляетъ, то преврати ее въ сію геометрическую прогрессію, которой первой членъ $=\frac{142857}{1000000}$, а знаменатель прогрессіи $=\frac{1}{1000000}$, чего ради сумма ея будетъ $\frac{\frac{142857}{1000000}}{1-\frac{1}{1000000}}$, умножь сверьху и снизу на 1000000, то сія сумма будетъ $\frac{142857}{999999}=\frac{1}{7}$.

531.

Что найденная десятичная дробь, точно $\frac{1}{7}$ дѣлаетъ, можетъ еще легче слѣдующимъ образомъ быть доказано. Положи мѣсто ея букву s такъ чтобъ

 $s=0$,

$$s = 0,142857142857142857 \text{ и пр.}$$

то буд. $10s = 1,428571428571428 57$ и пр.

$100s = 14,285714285714285 7$ и пр.

$1000s = 142,857142857142857$ и пр.

$10000s = 1428,571428571428 57$ и пр.

$100000s = 14285,714285714285 7$ и пр.

$1000000s = 142857,142857142857$ и пр.

вычти $s = 0,142857142857$ и пр.

$999999s = 142857$

раздѣли теперь съ обѣихъ сторонъ на 999999, то получится $s = \frac{142857}{999999}$ величина прежней десятичной дроби $\frac{1}{7}$.

532.

Равнымъ образомъ $\frac{2}{7}$ превращается въ десятичную дробь:

$\frac{7)2,0000000}{0,2857142}$ и протч. Сїе ведетъ насъ какимъ образомъ величину прежней десятичной дроби названную s, еще легче сыскать можно, ибо сїя дробь вдвое больше прежней, и потому $= 2s$; а когда мы нашли $100s = 14,2857142857 1$ и пр. то отсюда вычти $2s = 0,2857142857 1$ и пр.

оста-

останется $98f = 14$
почему $f = \frac{14}{98} = \frac{1}{7}$.

$\frac{3}{7} = 0,428571428 57$ и пр. сїе по прежнему будетъ $= 3f$, и мы нашли

$10f = 1,428571428 57$ и протч.
то вычти $3f = 0,428571428 57$ и протч.

останется $7f = 1$, то есть $f = \frac{1}{7}$.

533

И такъ когда знаменатель данной дроби будетъ 7, то десятичная дробь продолжается безконечно, и притомъ 6 чиселъ въ ней всегда повторяются, чему причину легко показать можно: ибо продолжая дѣленїе наконецъ въ остаткѣ столькожъ выпти должно, какъ и съ начала, а въ остаткѣ не можетъ быть больше разныхъ чиселъ какъ 1,2,3,4,5,6; и слѣдовательно по 6 томъ дѣленїи въ остаткѣ должны выходить опять тѣ же числа, какъ и съ начала; естли же знаменатель такого будетъ состоянїя, что послѣ дѣленїя напослѣдокъ ни чего не останется, то и сїе повторенїе чиселъ

въ томъ случаѣ уже мѣста имѣть не будетъ.

534.

Пусть будетъ знаменатель дроби 8, то найдутся слѣдующія десятичныя дроби $\frac{1}{8}=0,125$, $\frac{2}{8}=0,250$, $\frac{3}{8}=0,375$; $\frac{4}{8}=0,500$; $\frac{5}{8}=0,625$, $\frac{6}{8}=0,750$; $\frac{7}{8}=0,875$ и протч.

535.

Естли же знаменатель будетъ 9, то слѣдующія десятичныя дроби найдутся: $\frac{1}{9}=0,111$ и пр. $\frac{2}{9}=0,222$ и пр. $\frac{3}{9}=0,333$ и пр. Когда знаменатель $=10$, то будутъ дроби $\frac{1}{10}=0,100$; $\frac{2}{10}=0,200$; $\frac{3}{10}=0,300$, какъ изъ натуры самой вещи явствуетъ; подобнымъ образомъ будутъ $\frac{1}{100}=0,01$; $\frac{37}{100}=0,37$; $\frac{256}{1000}=0,256$; $\frac{24}{10000}=0,0024$, что такожде само по себѣ ясно.

536.

Когда знаменатель дроби данъ будетъ 11, то десятичная дробь найдется $\frac{1}{11}=0,09090909$ и протч. и естли бы сей данной дроби спрашивалась величина, то положи ее $=s$ и будетъ s $=0,$

$=0,09090909$; $10f=0,90909090$ и протч. $100f=9,0909090$ и протч. отсюда вычти f, и останется $99f=9$; и по сему $f=\frac{9}{99}=\frac{1}{11}$; $\frac{2}{11}=0,18181818$ и протч. $\frac{3}{11}=0,27272727$ и протч. $\frac{6}{11}=0,54545454$ и протч.

537.

Здѣсь особливо примѣчанїя достойны тѣ десятичныя дроби, въ которыхъ нѣкоторыя числа всегда повторяются, и такимъ порядкомъ идутъ безконечно ; а какъ способнѣе находить величину сихъ дробей, то будетъ показано.

Пусть сперва повторяемо будетъ одно только число напр. a, то будетъ $f=0,aaaaaa$ и прот.

Слѣдовательно $10f=a,aaaaaa$ и пр.
вычти $f=0,aaaaaa$

$9f=a$ и слѣд. $f=\frac{a}{9}$

Когда же будутъ повторяться 2 числа какъ ab, то будетъ $f=0,abababab$ и протч. почему $100f=ab,ababab$ и пр. отсюда вычти f, и останется $99f=ab$, слѣд. $f=\frac{ab}{99}$.

Ежели повторяются 3 числа, какъ *abc*, то будетъ $s=0$, *abcabcabc* и прочч. и $1000s = abc\ abc, abc$, изъ сего вычти s останется $999\ s = abc$ слѣд. $s = \frac{abc}{999}$ и такъ далѣе.

538.

По сему кáкъ скоро такая десятичная дробь случится, величину ея легко опредѣлить можно; напр. пусть будетъ данная дробь 0 296296296 и прочч. то величина ея будетъ $\frac{296}{999}$, сїю дробь раздѣли на 37 выдетъ $\frac{8}{27}$.

Отсюда должна произойти предложенная десятичная дробь; а что бы сїе ясняе показать, то положи $27=9.3$, и раздѣли 8 сперва на 9, и произшедшее посемъ частное на 3, какъ слѣдуетъ

$$\begin{array}{r} 9)8,000000 \\ \hline 3)0,888888 \\ \hline 0,296296 \end{array}$$

и прочч. которая есть данная десятичная дробь.

539.

Для примѣра дробь $\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}$ преврати въ десятичную, что слѣдующимъ образомъ учинится:

2)

2) 1,00000000000

3) 0,50000000000

4) 0,16666666666

5) 0,04166666666

6) 0,00833333333

7) 0,00138888888

8 0,0001984126984126

9) 0,00002480158730

10) 0,00000275573192

0,00000027557319.

ГЛАВА XIII.

О вычисленіи интерессовъ.

540.

Интерессы какого нибудь капитала въ процентахъ представляются, говоря сколько за 100 ежегодно платится. Деньги выдаются обыкновенно за 5 процентовъ, такъ что на 100 талеровъ платится въ годъ 5 талеровъ интере-

сса. Отсюда видно какимъ образомъ вычислять должно интерессы каждаго капитала по правилу тройному такъ:

100 даютъ, 5 что дастъ данной капиталъ. Пусть будетъ напр. капиталъ 860 рейхсталеровъ, то годовой его интерессъ найдется такъ:

100 : 5 = 860 къ искомому 43 талера.

100 | 4300 | 43

541.

При вычисленіи сего простаго интересса медлить мы не будемъ, а станемъ разсуждать объ интерессахъ съ интерессовъ, гдѣ ежегодные интерессы опять съ капиталомъ складываются, чрезъ что растетъ самой капиталъ. Въ семъ случаѣ спрашивается, сколько данной какой нибудь капиталъ по прошествіи нѣсколькихъ лѣтъ увеличится? Понеже капиталъ ежегодно прирастаетъ, когда по 5 процентовъ изъ каждыхъ 100 талеровъ чрезъ годъ здѣлается 105, то сколь бы великъ капиталъ ни былъ, какъ великъ онъ будетъ по прошествіи года, найти можно. Пусть будетъ капиталъ

питалъ a, то по прошествіи года оной найдется такъ, какъ 100 къ 105 = a къ искомому $\frac{105a}{100} = \frac{21a}{20}$, что написано можетъ быть и такъ $\frac{21}{20}. a$, или $a + \frac{1}{20}a$.

542.

Но когда къ настоящему капиталу его 20тая часть приложится, то получится капиталъ на слѣдующей годъ; а когда къ сему опять 20тая его часть придастся, то выдетъ капиталъ на второй годъ; къ сему приложивъ опять 20тую его часть найдется капиталъ на 3тей годъ и такъ далѣе. Отсюда легко видѣть можно, какимъ образомъ капиталъ ежегодно возрастаетъ, и сіе счисленіе такъ далеко продолжать можно, какъ желаешь.

543.

Пусть будетъ капиталъ 1000 талеровъ, которой выданъ за 5 процентовъ, и ежегодные отъ того интерессы опять къ капиталу прикладываются. Понеже помянутое счисленіе скоро приведетъ насъ къ дробямъ, то представимъ ихъ

въ десятичныхъ дробяхъ, и не далѣе, какъ до тысячныхъ частей талера продолжать ихъ будемъ, ибо меньшїе его части здѣсь уже не чувствительны.

Данной капиталъ по прошествїи 1 года

	1050 талер.
	52, 5
" " 2 " " "	1102, 5
	55, 125
" " 3 " " "	1157, 625
	57, 881
" " 4 " " "	1215, 506
	60, 775
" " 5 " " "	1276, 281 и пр.

544.

Симъ образомъ выкладку продолжать можно на столько лѣтъ, сколько потребно будетъ; но когда число лѣтъ будетъ гораздо велико, то и выкладка сїя будетъ весьма пространна и трудна, которую однако сократить можно слѣдующимъ образомъ.

Пусть капиталъ будетъ $= a$; и когда капиталъ 20 талеровъ чрезъ годъ дѣ-

лаетъ 21 талеръ, то капиталъ a чрезъ годъ возрастетъ до $\frac{21}{20}a$, потомъ въ слѣдующей годъ $\frac{21^2}{20^2}a = (\frac{21}{20})^2 a$; сей будетъ капиталъ по прошествіи двухъ лѣтъ, которой чрезъ годъ возрастетъ до $(\frac{21}{20})^3 a$, что показывать будетъ капиталъ по прошествіи 3хъ лѣтъ? По прошествіи 4хъ лѣтъ будетъ оной $(\frac{21}{20})^4 a$, послѣ 5ти лѣтъ $(\frac{21}{20})^5 a$; послѣ 100 лѣтъ $(\frac{21}{20})^{100} a$; и вообще по прошествіи неопредѣленнаго числа лѣтъ n будетъ оной $(\frac{21}{20})^n a$: по сему изъ даннаго какого нибудь числа лѣтъ величину капитала найти можно.

545.

Попадающаяся здѣсь дробь $\frac{21}{20}$ основана на томъ, что интерессы считаются въ 5 процентовъ; а $\frac{21}{20}$ то же, что и $\frac{105}{100}$. Ежели бы интерессы считались въ 6 процентовъ, то бы капиталъ a, по прошествіи года былъ $\frac{106}{100}a$; послѣ двухъ лѣтъ $(\frac{106}{100})^2 a$, и по прошествіи n лѣтъ будетъ $(\frac{106}{100})^n a$.

Ежели же бы интерессы 4хъ не болѣе процентовъ были, тобъ капиталъ a чрезъ n лѣтъ былъ $(\frac{104}{100})^n a$.

546.

546.

Ежели даны будутъ какъ капиталъ a, такъ и число лѣтъ, то сїю формулу легко разрѣшить можно будетъ помощїю логариѳмовъ; ибо здѣсь ничего больше дѣлать не требуется, какъ только сыскать логариѳмъ сей формулы, которая по 5ти процентовъ будетъ $(\frac{21}{20})^n a$. Поелику сїя формула есть произведенїе изъ $(\frac{21}{20})^n$ на a, то логариѳмъ ея будетъ $= l(\frac{21}{20})^n + l.a$, притомъ $(\frac{21}{20})^n$ есть степень, то $l(\frac{21}{20})^n = n. l(\frac{21}{20})$; слѣдов. логариѳмъ искомаго капитала $= n. l(\frac{21}{20}) + l.a$; а логариѳмъ дроби $\frac{21}{20} = l.21 - l\,20$.

547.

Пусть будетъ капиталъ $a = 1000$ талер.; спрашивается сколь великъ онъ будетъ по прошествїи 100 лѣтъ считая по 5ти процентовъ.

Здѣсь $n = 100$, и логариѳмъ сего искомаго капитала $=$ 100 лог. $\frac{21}{20}$ $+$ лог. 1000, которой выкладывается такъ:

изъ лог. $21 = 1,3222193$

вычти лог. $20 = 1,3010300$

лог. $\frac{21}{20} = 0,0211893$

по-

помножь на 100

100 лог. $\frac{21}{20}$ = 2, 1189300
придай лог. 1000 = 3, 0000000

5, 1189300 логар. искомаго капитала, и число его состоять будетЪ изЪ 6 фигурЪ такихЪ 131501 талеровЪ.

548.

КапиталЪ состоящей изЪ 3452 рейхсталер. по 6 процентовЪ, сколь великЪ будетЪ по прошествіи 64 лѣтЪ?

ВЪ семЪ примѣрѣ $a = 3452$, $n = 64$, слѣд. логариѳмЪ искомаго капитала = 64 лог. $\frac{53}{50}$ + лог. 3452, которой вычислится такЪ:

изЪ лог. 53 = 1, 7242759
вычти лог. 50 = 1, 6989700

лог. $\frac{53}{50}$ = 0, 0253059
умножь на 64

64 лог. $\frac{53}{50}$ = 1, 6195776
придай лог. 3452 = 3, 5380708

лог. искомаго капит. = 5, 1576484
слѣд. искомой капиталЪ = 143763 талеровЪ.

549.

549.

Ежели данное число лѣтъ будетъ очень велико, и понеже на него помножить должно логариѳмъ дроби, логариѳмы же таблицъ состоятъ не болѣе какъ изъ 7 знаковъ, то оттуда произойти можетъ чувствительная погрѣшность; по сей причинѣ логариѳмъ дроби состоять долженъ изъ большаго числа фигуръ, какъ изъ слѣдующаго примѣра явствуетъ.

Капиталъ состоящей изъ одного рейхсталера по 5 процентовъ продолжается 500 лѣтъ, и ежегодные интерессы всегда къ нему прикладываются, спрашивается, сколь великъ будетъ сей капиталъ по прошествiи 500 лѣтъ?

Въ семъ случаѣ $a = 1$; $n = 500$, слѣдовательно логариѳмъ искомаго капитала $= 500$ лог. $\frac{21}{20}$ + лог. 1, откуда произходитъ сiя выкладка:

лог. 21 = 1,3222192947339I9
вычти лог. 20 = 1,3010299956639812

лог. $\frac{21}{20}$ = 0,0211892990699938
помножь на 500 = 10,5946495349969000,
и сей есть логариѳмъ искомаго капитала,

ко-

которой самъ будетъ = 39323200000 талер.

550.

Ежели къ капиталу не только его интерессы, но каждой годъ еще новая сумма денегъ $= b$ прибавляться будетъ, то сей капиталъ ежегодно расти будетъ слѣдующимъ порядкомъ:

По прошествіи одного года

$= \frac{21}{20}.a + b$

″ ″ 2 ″ ″ $\left(\frac{21}{20}\right)^2 a + \left(\frac{21}{20}\right) b + b$

″ ″ 3 ″ ″ $\left(\frac{21}{20}\right)^3 a + \left(\frac{21}{20}\right)^2 b + \left(\frac{21}{20}\right) b + b$

″ ″ 4 ″ ″ $\left(\frac{21}{20}\right)^4 a + \left(\frac{21}{20}\right)^3 b + \left(\frac{21}{20}\right)^2 b + \left(\frac{21}{20}\right) b + b$

″ ″ n ″ ″ $\left(\frac{21}{20}\right)^n a + \left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} b + \left(\frac{21}{20}\right)^{n-2} b + \cdots \left(\frac{21}{20}\right) b + b$

Сей капиталъ состоитъ изъ двухъ частей, первая $= \left(\frac{21}{20}\right)^n a$, а другая есть рядъ обратно написанной $b + \left(\frac{21}{20}\right) b + \left(\frac{21}{20}\right)^2 b + \left(\frac{21}{20}\right)^3 b + \left(\frac{21}{20}\right)^4 b + \cdots \left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} b$ и означаетъ прогрессію геометрическую, которой знаменатель $\frac{21}{20}$, и сумма ея найдется такъ: умножь послѣдней членъ на знаменателя, выдетъ $\left(\frac{21}{20}\right)^n b$, изъ произведенія вычти первой членъ, b остатокъ $\left(\frac{21}{20}\right)^n b - b$ раздѣли на знаменателя уменшеннаго единицею, то есть, на $\frac{21}{20} - 1 = \frac{1}{20}$

и

и сумма прогрессіи $= 20 (\frac{21}{20})^n b - 20 b$, а искомой капиталЪ будетЪ $(\frac{21}{20})^n a + 20 (\frac{21}{20})^n b - 20 b = (\frac{21}{20})^n (a + 20 b) - 20 b$.

551.

Для вычисленія сего должно первой членЪ разсмотрѣть особенно и вычислить, что здѣлается, егдали найдешь его логариѳмЪ $= n$ лог. $\frac{21}{20}$ + лог.$(a + 20 b)$, то кЪ сему вЪ таблицахЪ прииищи надлежащіе числа, и получится первой членЪ, изЪ котораго вычтя $20 b$ останется искомой капиталЪ.

552.

ВопросЪ: нѣкто капиталу имѣетЪ 1000 талеровЪ и отдалЪ его по 5 процентовЪ, кЪ которому сверхЪ интерессовЪ прикладываетЪ еще онЪ каждой годЪ по 100 талеровЪ, сколь великЪ капиталЪ сей будетЪ по прошествіи 25 лѣтЪ?

Здѣсь $a = 1000$; $b = 100$; $n = 25$ и выкладка будетЪ такая.

Логар. $\frac{21}{20} = 0,0211892990$ (5

умножь на 25 0,1059464950(5

25 лог. $\frac{21}{20} = 0,5297324750$

лог:

лог. $(a+20b) = 3,4771213135$

$\underline{}$

4,0068537885

Слѣдовательно первая часть = 10159, ı талер. изъ нее вычти $20b = 2000$, останется капиталъ по прошествіи 25 лѣтъ = 8159, ı талеровъ

553.

Понеже капиталъ часъ отъ часу больше становится, и по прошествіи 25 лѣтъ возрастетъ до $8159\frac{1}{16}$ талер:, то можно спрашивать далѣе, сколько требуется лѣтъ, чтобъ капиталъ возросъ до 1000000 талеровъ?

Пусть сіе число лѣтъ будетъ $= n$, и когда $a = 1000$ $b = 100$, то по прошествіи n лѣтъ капиталъ будетъ $(\frac{21}{20})^n\ 3000 - 2000$, что должно быть равно 1000000, откуда происходитъ уравненіе $3000.(\frac{21}{20})^n - 2000 = 1000000$, придай съ обѣихъ сторонъ 2000 и будетъ $3000.(\frac{21}{20})^n = 1002000$, раздѣли съ обѣихъ сторонъ на 3000, то произойдетъ $(\frac{21}{20})^n = \frac{1002000}{3000} = 334$, сихъ чиселъ возми логариѳмы; n лог. $\frac{21}{20}$ = лог. 334 раздѣли съ обѣихъ сторонъ на лог. $\frac{21}{20}$

будетЪ $n = \frac{\text{лог. } 334}{\text{лог. } \frac{21}{20}}$; а лог. 334 = 2,5237465

лог. $\frac{21}{20} = 0,0211892$, по чему будетЪ $n = \frac{2,5237465}{0,0211892}$ умножь вЪ верху и вЪ низу на 1000000, выдетЪ $n = \frac{25237465}{211892}$, то есть 119 лѢтЪ, 1 мѢсяцЪ 7 дней; и такЪ по прошествіи сего времени данной капиталЪ возростетЪ до 1000000 талеровЪ.

554

Но ежели вмѢсто того, чтобЪ ежегодно кЪ капиталу нѢчто прибавлять, отЪ него отниматься будетЪ нѢкая сумма для своего содержанія, и сія сумма положится b, то по 5 процентовЪ выданной капиталЪ a такимЪ порядкомЪ перемѢняться будетЪ:

Данной капиталЪ $= a$

по прошествіи года $\frac{21}{20}a - b$

„ „ 2 „ „ $\left(\frac{21}{20}\right)^2 a - \left(\frac{21}{20}\right) b - b$

„ „ 3 „ „ $\left(\frac{21}{20}\right)^3 a - \left(\frac{21}{20}\right)^2 b - \left(\frac{21}{20}\right) b - b$

„ „ n „ „ $\left(\frac{21}{20}\right)^n a - \left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} b - \left(\frac{21}{20}\right)^{n-2} b \ldots - \left(\frac{21}{20}\right) b - b$

555.

Сія формула состоитЪ изЪ двухЪ частей, первая $\left(\frac{21}{20}\right)^n a$, изЪ которой вычита-

читается вторая часть, то есть сія геометрическая прогрессія обратно написанная

$b + \frac{21}{20}b + (\frac{21}{20})^2 b + (\frac{21}{20})^3 b + \ldots (\frac{21}{20})^{n-1} b$ сей прогрессіи выше сего найдена сумма $20(\frac{21}{20})^n b - 20b$, которую когда вычтешь изъ первой части, $(\frac{21}{20})^n a$, остатокъ даетъ искомой капиталъ по прошествіи n лѣтъ; а имянно: $(\frac{21}{20})^n a - 20(\frac{21}{20})^n b + 20b = (\frac{21}{20})^n (a - 20b) + 20b$.

556.

Сію формулу можно бы тотчасъ вывесть изъ прежней: ибо тамъ ежегодно прибавлялось b, а теперь оно же ежегодно вычитается; слѣдовательно больше ничего не требуется, какъ только въ прежней формулѣ мѣсто $+b$ поставить $-b$. Здѣсь особливо примѣчать надлежитъ, что ежели $20b$ будутъ больше нежели a, то первой членъ будетъ отрицательной; слѣдовательно и капиталъ часъ отъ часу уменьшается, какъ то само по себѣ видно: ибо ежели отъ капитала больше отниматься будетъ, нежели сколько интерессы приносятъ,

 то

то непремѣнно должо ему каждой годъ меньше становиться, и наконецъ уничтожиться, что мы примѣромъ изъяснить намѣрены.

557.

Нѣкто имѣетъ капиталъ во 100000 талерахъ состоящей, и отдалъ по 5 процентовъ, а на свое содержанїе беретъ онъ ежегодно 6000 талеровъ больше, нежели его интерессы, кои только 5000 талеровъ дѣлаютъ; чего ради капиталъ сей часъ отъ часу уменьшается: спрашивается, во сколько лѣтъ совсѣмъ онъ уничтожится?

Мѣсто сего числа лѣтъ положи n, и когда $a = 100000$ талер. $b = 6000$, то по прошествїи n лѣтъ капиталъ будетъ $= -20000(\frac{21}{20})^n + 120000$ или $120000 - 20000 (\frac{21}{20})^n$, слѣдовательно капиталъ уничтожится когда $20000(\frac{21}{20})^n$ возрастетъ до 120000 или когда $20000(\frac{21}{20})^n = 120000$; раздѣли на 20000, то будетъ $(\frac{21}{20})^n = 6$ возми сихъ чиселъ логариѳмы, то n лог. $\frac{21}{20}$ $=$ лог. 6, раздѣли на лог. $\frac{21}{20}$, найдется

n

$n = \frac{\text{лог. } 6}{\text{лог. } \frac{21}{20}} = \frac{0,7781513}{0,0211892}$ или $n = \frac{7781513}{211892}$, слѣд. $n = 36$ годамъ, 8 мѣсяц. 22 днямъ, и по прошествіи сего времени данной капиталъ совсѣмъ уничтожится.

558.

Здѣсь должно еще показать, какимъ образомъ по сему основанію интерессы на меньшее года время вычислять надлежитъ. Къ сему служитъ прежденайденная формула, что капиталъ a по пяти процентовъ по прошествіи n лѣтъ возрастаетъ до $(\frac{21}{2})^n a$: ибо ежели время короче года будетъ, то показатель n будетъ дробь, а выкладка такъ какъ и прежде здѣлана быть можетъ помощію логариѳмовъ. Ежели капиталъ станешь искать по прошествіи одного дня, то положи $n = \frac{1}{365}$, для двухъ дней будетъ $n = \frac{2}{365}$ и такъ далѣе.

559.

Пусть будетъ капиталъ $a = 100000$ талеровъ по 5 процентовъ, спрашивается сколь великъ онъ будетъ по прошествіи 8 дней?

Здѣсь $a = 100000$, $n = \frac{8}{365}$, слѣд. капиталъ будетъ $\left(\frac{21}{20}\right)^{\frac{8}{365}} 100000$; сего логариѳмъ $=$ лог. $\left(\frac{21}{20}\right)^{\frac{8}{365}} +$ лог. $100000 = \frac{8}{365}$ лог. $\frac{21}{20} +$ лог. 100000; а лог. $\frac{21}{20} = 0.0211892$, умножь ево на $\frac{8}{365}$ и будетъ

0,0004644, къ сему приложи логариѳмъ 100000 = 5,0000000, и будетъ 5,0004644 логариѳмъ искомаго капитала, которой будетъ 100107; слѣдовательно данной капиталъ 100000 талеровъ по прошествїи 8 дней возраститъ до 100107, такъ что въ первые 8 дней интересса сей капиталъ принесетъ 107 талеровъ.

560.

Сюда принадлежатъ еще другїе вопросы, въ которыхъ ищется, ежели нѣкая сумма денегъ съ нѣсколькихъ лѣтъ начала упадать, сколько оная теперь дѣлаетъ? здѣсь надобно смотрѣть что когда 20 талеровъ чрезъ годъ дѣлаютъ 21, то теперь 21 талеръ, которые чрезъ годъ заплатить должно, дѣлаетъ 20, а ежели по прошествїи одного года

упадшей

упадшей капиталъ положится $=a$, то оной будетъ $\frac{20}{21}a$, и чтобы сыскать сколько капиталъ a, которой нѣкое извѣстное время упадаетъ, за годъ прежде стоялъ, то умножь его на $\frac{20}{21}$, за 2 года прежде оной будетъ $(\frac{20}{21})^2a$; за 3 года $(\frac{20}{21})^3a$, и вообще за n лѣтъ величина онаго $(\frac{20}{21})^na$.

561.

Нѣкто пользуется годовыми приходами во 100 талерахъ состоящими 5 лѣтъ, и желаетъ теперь ихъ продать за наличные деньги по 5 процентовъ; спрашивается сколько онъ за нихъ получитъ?

За 100 талеровъ, которые упадаютъ послѣ 1 года получитъ онъ	95, 239
" " 2 " " -----	90, 704
" " 3 " " -----	86, 385
" " 4 " " -----	82, 272
" " 5 " " -----	78, 355
5 , , " "	432, 955

Слѣдовательно за сіи приходы больше не можетъ онъ требовать, какъ 432, 955 талеровъ.

562.

562.

Ежели бы какіе доходы гораздо большее число лѣтъ продолжались, то бы такая выкладка была очень скучна, которую однако облегчить можно симъ образомъ. Пусть будетъ годовой приходъ a, которой уже сей часъ начинается, и продолжается n лѣтъ, то оные будутъ теперь

$$a + \tfrac{20}{21}a + \left(\tfrac{20}{21}\right)^2 a + \left(\tfrac{20}{21}\right)^3 a + \left(\tfrac{20}{21}\right)^4 a + \text{---} \left(\tfrac{20}{21}\right)^n a$$

и сія есть геометрическая прогрессія, которой сумму найти должно. Чего ради послѣдней членъ умножь на знаменателя прогрессіи, выдетъ $\left(\tfrac{20}{21}\right)^{n+1} a$, изъ сего вычти первой членъ, останется $\left(\tfrac{20}{21}\right)^{n+1} a - a$, сей остатокъ раздѣли на знаменателя уменьшеннаго единицею, то есть на $-\tfrac{1}{21}$, или что все равно, помножь на -21, слѣд. искомая сумма будетъ $-21\left(\tfrac{20}{21}\right)^{n+1} a + 21a$, то есть: $21a - 21\left(\tfrac{20}{21}\right)^{n+1} a$; въ сей формулѣ послѣдней членъ, которой вычитать надлежитъ изъ перваго, можно легко найти помощію логариѳмовъ.

Конецъ третей части о содержаніи и пропорціи.